

سلسلة الفاروق

فى

الرياضيات

للمصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١٥٦٣٤٤٤٣١

حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى ح

الدرس الأول

مثال ١

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١ $x^2 + 5x + 6 = 0$

٢ $x^2 + 12x + 4 = 0$

٣ $x^2 = 2(x + 6)$

٤ $x^2 = 16$

٥ $x + \frac{5}{x} = 6$ ، $x \neq 0$

الحل

١ $\therefore x^2 + 5x + 6 = 0$

$\therefore (x+3)(x+2) = 0$

إما $x+2=0$ أو $x+3=0$

$\therefore x = -2$ أو $\therefore x = -3$

$\therefore \text{م. ح.} = \{-2, -3\}$

٢ $x^2 + 12x + 4 = 0$

$\therefore \text{الحد الأوسط} = \sqrt{\text{الحد الأول}} \times \sqrt{\text{الحد الأخير}}$

 \therefore المقدار ثلاثى مربع كامل

$\therefore (x + \sqrt{\text{الحد الأول}} + \sqrt{\text{الحد الأخير}})^2 = 0$

$\therefore (x+3+2)^2 = 0$

$\therefore x+5=0$

$\therefore x = -5$

$\therefore \text{م. ح.} = \{-5\}$

الصورة العامة

$ax^2 + bx + c = 0$

حيث $a \neq 0$ ، b ، c أعداد حقيقية ، $a \neq 0$

مثال

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^2 + 3x = 0$

$x^2 - 4 = 0$

حل المعادلة فى ح

يقصد بحل المعادلة :

$ax^2 + bx + c = 0$

إيجاد قيم المتغير x التي تحقق تساوي

طرفيها وتسمى هذه القيم جذور المعادلة

ويتم حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير

واحد فى ح بطريقتين : جبرياً وبيانياً

أولاً : الطريقة الجبرية

بإحدى طريقتين :

١ التحليل :

٢ القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$\therefore (3s - 4)(3s + 4) = 0$$

$$\text{إما : } 3s - 4 = 0 \quad \text{أو : } 3s + 4 = 0$$

$$\therefore 3s = 4 \quad \therefore 3s = -4$$

$$\therefore s = \frac{4}{3} \quad \therefore s = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \left\{ \frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right\}$$

$$\therefore s + \frac{5}{s} = 4, s \neq 0 \quad \text{⑤}$$

بالضرب $\times s$ للطرفين

$$\therefore s^2 + 5 = 4s$$

$$\therefore s^2 - 4s + 5 = 0$$

ويصعب تحليل المقدار إلى عاملين

باستخدام القانون العام :

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore 1 = a, b = -4, c = 5$$

$$\therefore s = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$\therefore s = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$\therefore s = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\therefore s = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \emptyset$$

$$\therefore s^2 = 2(s + 6) \quad \text{③}$$

$$\therefore s^2 - 2s - 12 = 0$$

$$\therefore s^2 - 2s - 12 = 0$$

يصعب تحليل المقدار : $(s^2 - 2s - 12)$

لذلك نوجد حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore 1 = a, b = -2, c = -12$$

$$\therefore s = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$$

$$\therefore s = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{2}$$

$$\therefore s = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{2}$$

إما

$$\therefore s = \frac{2 + \sqrt{52}}{2} \approx 6, 4$$

أو

$$\therefore s = \frac{2 - \sqrt{52}}{2} \approx -6, 2$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \{6, 4, -6, 2\}$$

$$\therefore 9s^2 = 16 \quad \text{④}$$

$$\therefore 9s^2 - 16 = 0$$



مثال ٢

أوجد في مجموعة الحل للمعادلات الآتية

$$١ \quad س + ٣ = ٥$$

$$٢ \quad س - ٢ = ٥$$

$$٣ \quad س - (٣ + ١) = ٣$$

الحل

$$١ \quad س + ٣ = ٥$$

بأخذ س عامل مشترك

$$س = (٥ - ٣)$$

$$س = ٢$$

$$س = ٢$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \{٢, ٠\}$$

$$٢ \quad س - ٢ = ٥$$

معامل س لا يساوي ١

المقدار غير بسيط

$$\begin{array}{rcl} ٢س & - & ١ \\ س & - & ٢ \end{array}$$

$$\therefore (س - ١) (س - ٢) = ٠$$

$$\begin{array}{l} \text{إما} \quad س = ١ \\ \text{أو} \quad س = ٢ \end{array}$$

$$\therefore س = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \{٢, \frac{١}{٢}\}$$

$$٣ \quad س - (٣ + ١) = ٣$$

نوجد عددين حاصل ضربهم

$$= (٣ + ١) -$$

العددان هما : ١ ، ٣

$$\therefore (س - ١) (س - ٣) = ٠$$

$$\begin{array}{l} \text{إما} \quad س = ١ \\ \text{أو} \quad س = ٣ \end{array}$$

$$\therefore س = ١$$

$$\therefore \text{م. ح.} = \{٣, ١\}$$



ثانياً : الطريقة البيانية

ولحل معادلة الدرجة الثانية بيانياً

١ نضع المعادلة على الصورة العامة

$$P = S_1^2 + S_1 S_2 + S_2^2$$

٦ **نفرض أن :**

$$د(س) = ۱س۲ + ۲س + ۳ =$$

٣ نوجد نقطة رأس منحني الدالة التربيعية

وہی $(\frac{p}{r})$ ، $d(\frac{p}{r})$

٤ نكون الجدول التالي

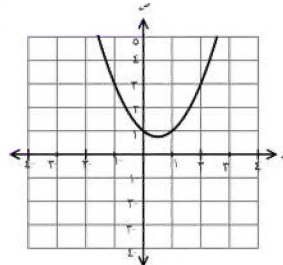
س					$\frac{2}{p^2}$	
د(س)					د($\frac{2}{p^2}$)	

٥ نمثل الدالة بيانياً

وتوجد عدة حالات

١ إذا كان منحنى الدالة التربيعية

لا يقطع محور السينات

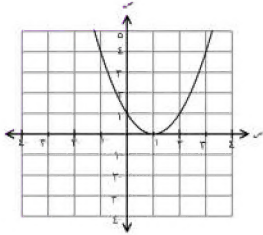


∴ مجموعة حل المعادلة $D(s) = 0$:

فی ع ہی \emptyset

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

٢ إذا كان منحنى الدالة التربيعية



يمس محور السينات

فإن نقطة التماس هي : $(\frac{5}{12}, 0)$

∴ مجموعة حل المعادلة $D(s) = 0$ ،

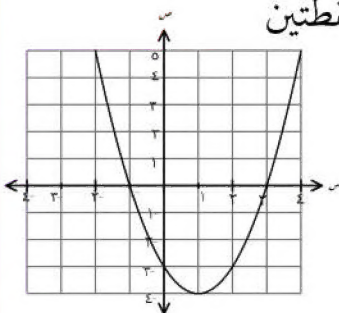
فی ع ہی $\{\frac{7}{12}\}$

ويكون جذرا المعادلة حقيقيان متساويان

وکل منها یساوی $\frac{۷}{۱۶}$

إذا كان منحنى الدالة التريعية

يقطع محور السينات في النقطتين



(٠، م) ، (٠، ج)

مجموعة حل المعادلة $D(s) = 0$:

فی ع ہی { ل ، م }

ويكون جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

مثال ٣

أوجد في ح مجموعة حل المعادلة

$$س^٢ - ٢س = ٣ \text{ بيانيا}$$

الحل

١ نضع المعادلة على الصورة العامة

$$\therefore س^٢ - ٢س - ٣ = ٠$$

٢ نفرض أن د(س) = س^٢ - ٢س - ٣

٣ نوجد الإحداثي السيني لنقطة رأس

$$\text{المنحنى : } س = \frac{-٢}{٢} = -١ = \frac{٢}{٢}$$

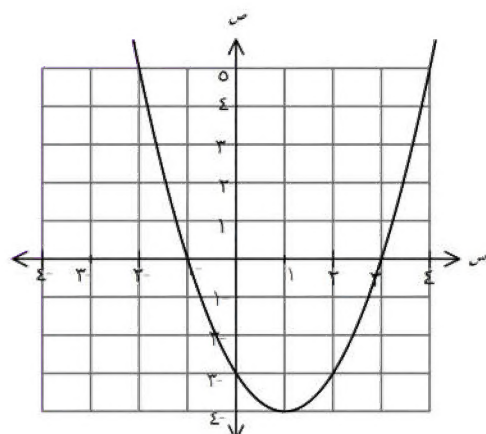
$$د(١) = (١)^٢ - ٢ \times ١ - ٣ = -٤$$

$$= -٤ = ٣ - ٢ - ١$$

٤ نكون الجدول التالي

س	٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

٥ نمثل الدالة بيانياً



منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات

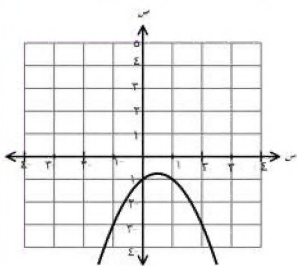
$$(-١, ٠), (٣, ٠)$$

∴ مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠

$$\text{في ح هي } \{-١, ٣\}$$

ملاحظات مهمة

١ الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية



$$د(س) = س^٢ + س + ح$$

ويكون :

١ المنحنى مفتوح لأسفل ∴ $١ > ٠$

٢ المنحنى لا يقطع محور السينات

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

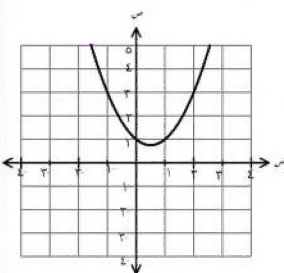
وتكون مجموعة الحل في ح هي ∅

٣ قيمة المقدار : $٤ - ٢ - ١ = ١ > ٠$

٤ المنحنى يقطع محور الصادات

$$(١, -٤) \therefore ح = -١$$

٢ الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية



$$د(س) = س^٢ + س + ح$$

ويكون :

١ المنحنى مفتوح لأعلى ∴ $١ < ٠$

٢ المنحنى لا يقطع محور السينات

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

وتكون مجموعة الحل في ح هي ∅

مثال ٥

أوجد قيمتي : ٢ ، ٣ إذا علم أن : ٣ ، ٢ هما جذرا المعادلة :

$$٢س^٢ + ٣س + ٦ = ٠$$

الحل

$$\therefore س = ٢ \text{ جذر للمعادلة}$$

$$\therefore ٢ + ٢ + ٦ = ٠$$

بالقسمة على ٢ للطرفين

$$\therefore ٢ + ٣ + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٢ + ٣ = -٣ \quad \text{①} \leftarrow$$

$$\therefore س = ٣ \text{ جذر للمعادلة}$$

$$\therefore ٩ + ٣ + ٦ = ٠$$

بالقسمة على ٣ للطرفين

$$\therefore ٣ + ٣ + ٢ = ٠$$

$$\therefore ٣ + ٢ = -٣ \quad \text{②} \leftarrow$$

بطرح ① من ②

$$\therefore ١ = ٢$$

① بالتعويض في

$$\therefore ٢ + ٣ = -٣$$

$$\therefore ٥ = ٣$$

③ قيمة المقدار : $٢ - ٤ = ٢$ ، $٣ > ٠$

④ المنحنى يقطع محور الصادات

$$(٠, ١) \therefore ١ = ٠$$

مثال ٤

إذا كانت : $س = ٦$ أحد جذري المعادلة :

$$س^٢ + ٥س + ٦ = ٠$$

فأوجد قيمة : ٢ ثم أوجد الجذر الآخر

الحل

$$\therefore س = ٦ \text{ جذر للمعادلة}$$

$$٦^٢ + ٥ \times ٦ + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٣٦ + ٣٠ + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٦٦ + ٦ = ٠$$

$$\therefore ٦٦ = -٦$$

المعادلة هي :

$$س^٢ + ٥س - ٦٦ = ٠$$

$$\therefore (س + ١١)(س - ٦) = ٠$$

$$\text{إما } س = ١١ \text{ أو } س = -٦$$

$$\therefore س = ١١ \quad \therefore س = -٦$$

الجذر الآخر هو : $س = -٦$

حل آخر

نكون المعادلة التي جذراها ٢ ، ٣

∴ المعادلة هي :

$$٠ = (٣ - س) (٢ - س)$$

$$٠ = (٣ - س) ٢ - (٣ - س) س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٢ - ٣ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

جذراهما ٢ ، ٣ وتساوى الحد المطلق فيهما

∴ بمقارنة المعاملات

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

∴ بتحليل المقدار إلى عاملين

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

مثال ٧

إذا كانت :

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

أوجد قيم : ٢ ، ٣ ، ٤

إذا علم أن جذرى المعادلة د (س) = ٠ هما :

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

الحل

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

مثال ٦

إذا كان (س - ٣) أحد عاملي المقدار

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

ثم أوجد العامل الآخر

الحل

∴ (س - ٣) أحد عاملي المقدار

$$٠ = ٦ + س ٥ - س ∴$$

$$\therefore \boxed{3 = -3}$$

$$\therefore د (س) = 3س^2 + 3س - 3$$

$$\therefore 3, \frac{1}{3} \text{ هما جذرى المعادلة: } د (س) = 0$$

$$\therefore 3, \frac{1}{3} \text{ هما جذرى المعادلة}$$

$$\therefore \boxed{3س^2 + 3س - 3 = 0} \leftarrow \textcircled{1}$$

$$\therefore \text{ نكون المعادلة التى جذراها } 3, \frac{1}{3}$$

$$\therefore (س - 3) (س + \frac{1}{3}) = 0$$

$$\therefore (س - 3) (3س + 1) = 0$$

$$\therefore 3س^2 + 3س - 3 = 0$$

$$\therefore 3س^2 - 5س - 3 = 0 \leftarrow \textcircled{2}$$

$$\text{المعادلتان } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ جذراهما: } 3, \frac{1}{3}$$

والمعادلتان تشتركان فى حد من حدودهما

\therefore بمقارنة المعاملات فى المعادلتين

$$\therefore \boxed{3 = 3} , \boxed{-5 = -3}$$



مقدمة عن الأعداد المركبة (ك)

٢ القوى المختلفة

لاحظ :

$$١ = ٤$$

$$١ \times ١ = ٤ \times ٤ = ٨$$

$$١ = ١ \times ١ \times ١ = ٤ \times ٤ \times ٤ = ١٦$$

$$١ = ٤ = ٨ = ١٦ = ٣٢ = ٦٤$$

ملحوظة

$$١ = \frac{\text{عدد يقبل القسمة على } ٤}{(٤)}$$

٣ قوى العدد (٤) السالبة

لايجاد قيمة $٤^{-١}$ نجمع على الأس

مضاعف العدد ٤ الأكبر من ٤ مباشرة

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٦^{-١} = ٤^{-٢}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

٤ : قوى العدد (٤) بوجه عام

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

نعلم أن

المعادلة : $١ = ٤$ ليس لها حل في

مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)

لأن : $١ = ٤$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

لابد من البحث عن مجموعة جديدة

من الأعداد لحل هذه المعادلة

العدد التخيلي

هو العدد الذي مربعه يساوي (١-)

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

وله الخاصية التالية : $١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

قوى العدد (٤)

١ القوى الأساسية

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$

$$١ = ٤ = ١٦ = ٤^{-١} = ١٠٤ + ١٠٣ = ٤^{-٣} = ٤^{-١}$$



لمعرفة قيمة (ت) مرفوعة لأس أى عدد

نقسم الأس على ؛ ونحذف العدد الصحيح

فإذا كان المتبقى كما بالشكل

٠,٥	٠,٢٥
١ -	ت
ت -	١
٠,٧٥	٠,٠٠

فمثلاً :

$$ت^{٢٧٥} = \dots\dots\dots$$

نقسم الأس على ٤

$$٦٨,٧٥ = ٤ \div ٢٧٥ \text{ فيكون}$$

نبحث عن ٠,٧٥ فى الشكل

فيكون الناتج هو : (ت -)

مثال ٢

أوجد فى أبسط صورة كلاً مما يأتى

$$\frac{١}{٥} \text{ (١) } \quad ١^{-٨} \text{ (٢)}$$

الحل

$$\frac{١}{٥} \text{ (١) } \quad ١^{-٨} \text{ (٢)}$$

$$١^{-٨} \times ١^{-٥} =$$

$$١^{-٨-٥} =$$

$$١^{-١٣} =$$

$$١^{-١٣} =$$

$$١^{-٨} \text{ (٢) } \quad ١^{-٨} \times ١^{-٨} =$$

$$١^{-٨-٨} = ١^{-١٦} =$$

$$١^{-١٦} =$$

مثال ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

$$١^{-٥} = \dots\dots\dots$$

$$١ - \text{ (١) } \quad ١ \text{ (٢) } \quad ١ - \text{ (٣) } \quad ١ \text{ (٤)}$$

$$١^{-٤} = \dots\dots\dots$$

$$١ - \text{ (١) } \quad ١ \text{ (٢) } \quad ١ - \text{ (٣) } \quad ١ \text{ (٤)}$$

$$١^{-٣} = \dots\dots\dots$$

$$١ - \text{ (١) } \quad ١ \text{ (٢) } \quad ١ - \text{ (٣) } \quad ١ \text{ (٤)}$$

$$١^{-٩} = \dots\dots\dots$$

$$١ - \text{ (١) } \quad ١ \text{ (٢) } \quad ١ - \text{ (٣) } \quad ١ \text{ (٤)}$$

أبسط صورة للمقدار:

$$\dots\dots\dots = (١ + ت)^٢$$

مثال ٣

أوجد ناتج كلاً مما يأتي في أبسط صورة

١) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$

٢) $\sqrt{7} \times \sqrt{7}$

٣) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

٤) $(-3) \times (-2)$

٥) $(1 + 1)$

الحل

١) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$

$\sqrt{8} \times \sqrt{2} =$

$\sqrt{16} =$

$4 \times 1 =$

$4 =$

٢) $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = \sqrt{7} \times \sqrt{7}$

$7 =$

٣) $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{3} \times \sqrt{3} =$

$3 \times 1 =$

$3 =$

$3 =$

٤) $(-3) \times (-2)$

$6 \times 2 =$

$12 \times 3 =$

$36 = 1 \times 36 =$

٥) $(1 + 1)$

$[(1 + 1)] =$

$[1 + 1 + 1] =$

$3 = 1 + 1 + 1$

$[1 + 1 + 1] =$

$[3] =$

$3 \times 3 =$

$9 =$



العدد المركب

هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة :

$$ع = ب + ٦ ت$$

حيث : $ب$ ، أعداد حقيقية ، $ت = ١ -$

ويسمى : $ب$ الجزء الحقيقى

ويسمى : $٦ ت$ الجزء التخيلى

ملحوظة

إذا كان : $ع = ب + ٦ ت$ وكان :

١ $ب =$ صفر أى أن : $ع = ب$

فإن العدد $ع$ يسمى حقيقى صرف

٢ $ب =$ صفر أى أن : $ع = ٦ ت$

فإن العدد $ع$ يسمى تخيلى صرف

٣ إذا كان : $ع =$ صفر

فإن : $ب =$ صفر ، $ت =$ صفر

مثال ٤

أوجد قيمتى $س$ ، $ص$ التى تحقق :

$$٠ = (٦ - س) + (٣ ص + س) ت$$

الحل

∴ العدد المركب : $٠ = ب + ٦ ت$

عندما $٠ = ب$ ، $٠ = ٦ ت$

∴ العدد المركب : $٠ = ب + ٦ ت$

عندما $٠ = ب$ ، $٠ = ٦ ت$

$$٠ = ٦ - س$$

$$١ \leftarrow ٦ = س$$

$$٢ \leftarrow ٠ = ٣ ص + س$$

بالتعويض من ١ فى ٢

$$٠ = ٦ + ٣ ص$$

$$٦ - = ٣ ص$$

بالقسمة على ٣ للطرفين

$$٢ - = ص$$

ملحوظة

١ مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة

جزئية من مجموعة الأعداد المركبة

$$ع \supset \leq$$

كل عدد حقيقى هو عدد مركب فيه

الجزء التخيلى = صفر

$$٠ = ٣ + ٣ ت$$

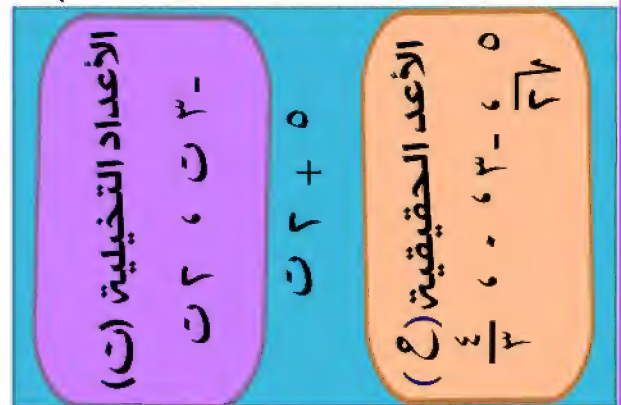
٢ جميع الأعداد التخيلية هى أعداد مركبة

فيها الجزء الحقيقى = صفر

$$٢ ت = ٠ + ٢ ت$$



مجموعة الأعداد المركبة (ك)



تساوى عددين مركبين

إذا كان : $١ع = ١س + ١ص$ ، $٢ع = ٢س + ٢ص$

عددان مركبان

فإن : $١ع = ٢ع$

إذا تحقق الشرطان الآتيان معا

① $١س = ٢س$ ② $١ص = ٢ص$

العمليات على الأعداد المركبة

أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان : $١ع = ١س + ١ص$ ، $٢ع = ٢س + ٢ص$

عددان مركبان

فإن :

 $١ع + ٢ع$

$$= (١س + ٢س) + (١ص + ٢ص)$$

 $١ع - ٢ع$

$$= (١س - ٢س) + (١ص - ٢ص)$$

مثال ٥

أوجد قيمتي $١س$ ، $١ص$ التي تحقق

$$(١س + ١ص) + ٣ = ٥ + (١س - ١ص)$$

الحل

العددان

$$(١س + ١ص) + ٣ = ٥ + (١س - ١ص)$$

متساويان



مثال ٦

ثانياً : ضرب الأعداد المركبة

$$\text{إذا كان : } ١ع = ١س + ١ص ت$$

$$٢ع = ٢س + ٢ص ت$$

عددان مركبان

فإن :

$$١ع \times ٢ع = (١س + ١ص ت) (٢س + ٢ص ت)$$

$$= (١س \times ٢س + ١س \times ٢ص ت + ١ص ت \times ٢س + ١ص ت \times ٢ص ت)$$

مثال ٨

أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق

$$١س + ١ص ت = (٢س + ٣) (٤ + ١) ت$$

الحل

$$\therefore ١س + ١ص ت = (٢س + ٣) (٤ + ١) ت$$

$$٣ = (٢س + ٣) (٤ + ١) ت$$

$$٣ = ٨س + ١٢ + ٣ + ١٢$$

$$\therefore ١ - ٨س = ١٢$$

$$٨س = ١٢ - ١$$

$$٨س = ١١$$

$$\therefore ٨س = ١١ \Rightarrow ٨س = ١١$$

$$\therefore ٨س = ١١ \Rightarrow ٨س = ١١$$

أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق :

$$١س + ١ص ت = (٢س + ٣) (٤ + ١) ت$$

الحل

بوضع الطرف الايسر في أبسط صورة

$$١س + ١ص ت = (٢س + ٣) (٤ + ١) ت$$

$$\therefore ١س + ١ص ت = ٨س + ١٢ + ٣ + ١٢$$

بمساواة الطرفين

$$\therefore ١س = ٨س ، ١ص ت = ١٢$$

مثال ٧

أوجد قيمتي س ، ص التي تحقق :

$$١س + ١ص ت = (٢س + ١) (٤ - ٢) ت$$

الحل

بوضع الطرف الايسر في أبسط صورة

$$\therefore ١س + ١ص ت = (٢س + ١) (٤ - ٢) ت$$

$$\therefore ١س + ١ص ت = ٨س + ١٢ - ٢ - ٢$$

$$\therefore ١س + ١ص ت = ٨س + ١٢ - ٢ - ٢$$

$$\therefore ١س + ١ص ت = ٨س + ١٢ - ٢ - ٢$$

بمساواة الطرفين

$$\therefore ١س = ٨س ، ١ص ت = ١٢$$



طرح عدنان مترافقان

لأى عددين مترافقين

$$ع_1 = ب + ١ ، ع_2 = ب - ١$$

فإن

$$ع_1 - ع_2 = (ب + ١) - (ب - ١)$$

$$= ٢ ب$$

$$ع_1 - ع_2 = (ب + ١) - (ب - ١)$$

$$= ٢ ب$$

مثال ١٠

إذا كان ع_١ ، ع_٢ عدنان مركبان :

$$ع_1 = ٥ + ٤ ت ، ع_2 = ٥ - ٤ ت$$

فاوجد : ١) ع_١ + ع_٢ ٢) ع_١ - ع_٢

الحل

$$١) ع_1 + ع_2 = (٥ + ٤ ت) + (٥ - ٤ ت)$$

$$= ١٠$$

$$٢) ع_1 - ع_2 = (٥ + ٤ ت) - (٥ - ٤ ت)$$

$$= ٤ ت + ٥ - ٥ + ٤ ت$$

$$= ٨ ت$$

مثال ٩

أوجد ناتج مايتى

$$(٧ - ت) (٣ + ٢ ت)$$

الحل

$$(٧ - ت) (٣ + ٢ ت)$$

$$= ٧ (٣ + ٢ ت) - ت (٣ + ٢ ت)$$

$$= ٢١ + ١٤ ت - ٣ ت - ٢ ت²$$

$$= ٢١ + ١١ ت - ٢ ت²$$

$$= ٢٣ + ١١ ت$$

العدنان المترافقان

هما عدنان يختلفان فى إشارة الجزء التخيلى فقط

العدد $١ + ب + ب مترافق هو ١ - ب$

العدد	٢-٣	٥+	٣	٧	٥-	٢-
مترافق	٣+	٥-	٣-	٧	٥+	٢-

جمع عدنان مترافقان

لأى عددين مترافقين

$$ع_1 = ب + ١ ، ع_2 = ب - ١$$

فإن

$$ع_1 + ع_2 = (ب + ١) + (ب - ١)$$

$$= ٢ ب$$

$$= \text{ضعف الجزء الحقيقى}$$

ضرب العددين المترافقان

لأى عددين مترافقين

$$ع + ب = ع ، ع - ب = ع$$

فإن :

$$(ع + ب) (ع - ب) = ع \times ع$$

$$ع^2 - ب^2 = ع^2 - ب^2$$

$$= \text{مربع الجزء الحقيقي} + \text{مربع الجزء التخيلي}$$

حاصل ضرب العددين المترافقان

$$= \text{مربع الجزء الحقيقي} + \text{مربع الجزء التخيلي}$$

فمثلاً :

$$١٣ = ٤ + ٩ = (٣ - ٢)(٣ + ٢)$$

$$٢٦ = ١ + ٢٥ = (٥ + ١)(٥ + ١)$$

مثال ١١

اوجد في أبسط صورة قيمة المقدار :

$$(١ + ت)^2 + (٣ + ٢ت)(٣ - ٢ت)$$

الحل

$$: (١ + ت)^2 + (٣ + ٢ت)(٣ - ٢ت)$$

حاصل ضرب عددين مترافقين

مربع قوس من حدين

مثال ١٢

قيمة المقدار :

$$(١٣ + ت) (١٣ - ت) = ١٣^2 - ت^2$$

الحل

$$: \text{المقدار} = \frac{(١٣ + ت)(١٣ - ت)}{١٣^2 - ت^2}$$

$$١ = \frac{١٣^2 - ت^2}{١٣^2 - ت^2}$$

قسمة عددين مركبين

لوضع العدد : $\frac{ع + ب}{ح + د}$ على الصورة :

س + ص ت نضرب في مرافق المقام بسطا ومقاما

وهو (ح - د ت)

مثال ١٣

$$\frac{٥}{٢ + ت}$$

أكتب العدد : $\frac{٥}{٢ + ت}$ على الصورة : $\frac{ع + ب}{ح + د}$

الحل

بالضرب في مرافق المقام وهو (٢ - ت)

بسطا ومقاما

مثال ١

إذا كان: $\frac{13}{t-5} = س$ ، $\frac{t+3}{t+1} = ص$

أثبت ان: $س$ ، $ص$ مترافقان

ثم أوجد قيمة المقدار: $س + ص$

الحل

$$س = \frac{13}{t-5}$$

بالضرب $\times (t+5)$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore س = \frac{(t+5)13}{(t+5)(t-5)}$$

$$\therefore س = \frac{(t+5)13}{1+25}$$

$$\therefore س = \frac{(t+5)13}{26}$$

$$\therefore س = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \leftarrow ①$$

$$، \therefore ص = \frac{t+3}{t+1}$$

بالضرب $\times (t-1)$ بسطاً ومقاماً

$$\therefore ص = \frac{(t-1)(t+3)}{(t-1)(t+1)}$$

$$\therefore ص = \frac{t^2-3-t+3}{1+1}$$

$$\therefore ص = \frac{t^2-t-3+3}{1+1}$$

$$\therefore ص = \frac{t-5}{2}$$

$$\frac{(t-1)5}{(t-1)(t+1)} = \frac{5}{t+1}$$

$$\frac{(t-1)5}{t+1} =$$

$$\frac{(t-1)5}{5} =$$

$$= t-1$$

مثال ١٤

أوجد قيمتي $س$ ، $ص$ التي تحقق

$$\frac{س^2 + ص^2}{س + ص} = 3 + 5$$

الحل

$$\therefore \frac{س^2 + ص^2}{س + ص} = 3 + 5$$

بالضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً

$$\therefore \frac{(س^2 + ص^2)(س - ص)}{(س + ص)(س - ص)} = 3 + 5$$

$$\therefore \frac{(س^2 + ص^2)(س - ص)}{س^2 - ص^2} = 3 + 5$$

$$\therefore 3 + 5 = س - ص$$

$$\therefore س = 5 ، ص = 3$$



$$\therefore \text{ص} = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \text{ ت} \leftarrow \textcircled{2}$$

من : ① ، ②

نجد أن س ، ص مترافقان

$$\therefore \text{س} + \text{ص} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ ت}$$

$$\therefore \text{س} + \text{ص} = \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{س} \text{ ، } \text{ص} = \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6} \right) \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \right) = \frac{1}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{س} \text{ ، } \text{ص} = \frac{5}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{المقدار} = \text{س} + \text{ص} + \text{ص} = \text{س} + 2\text{ص}$$

بإضافة : س ص ، - س ص

$$\therefore \text{المقدار} = \text{س} + 2\text{ص} + \text{ص} - \text{ص} = \text{س} + 2\text{ص}$$

$$= (\text{س} + \text{ص}) - \text{ص} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$= (5) - (6) = -1$$

$$= 18,5 = 6,5 - 25 = -8$$



مثال ١

عين نوع جذري المعادلة التربيعية

$$x^2 + \frac{6}{x} - 5 = 0, x \neq 0$$

الحل

$$x^2 + \frac{6}{x} - 5 = 0, x \neq 0 \quad \text{بالمضرب في } x \text{ للطرفين}$$

$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 6 = 0$$

∴ الجذران حقيقيان مختلفان

المميز = صفر فإن

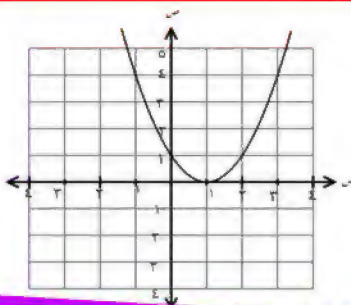
- جذري المعادلة التربيعية حقيقيان متساويان وكل

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

- الجذران مركبان مترافقان

- منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور

السينات في النقطة $(0, \frac{b}{a})$



الشكل المقابل

يمثل منحنى دالة تربيعية

مميزها يساوى الصفر

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

عند حل المعادلة: $ax^2 + bx + c = 0$ حيث

$a \neq 0$, b, c أعداد حقيقية، $a \neq 0$

باستخدام القانون العام فإننا نحصل على الجذرين:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ونجد أن كلا من الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{b^2 - 4ac}$

ويسمى المقدار: $b^2 - 4ac$ مميز المعادلة التربيعية

فإذا كان المميز

المميز < 0 (موجباً) فإن:

- جذري المعادلة التربيعية حقيقيان مختلفان

ويكون منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة

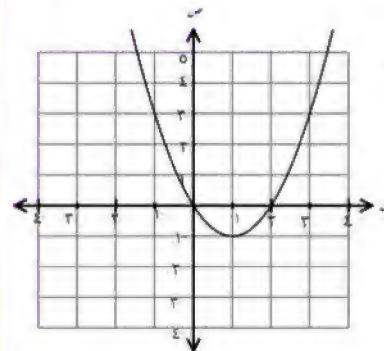
التربيعية يقطع محور السينات في نقطتين مختلفتين

الشكل المقابل

يمثل منحنى دالة تربيعية

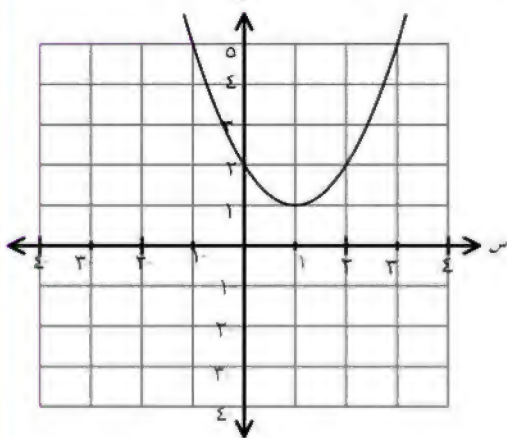
ويكون

$$x^2 - 4x + 4 < 0$$



مثال ٢

الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية مميزها > 0



يمثل منحنى دالة تربيعية

$$D(s) = s^2 + 2s + 1$$

ويكون المقدار: $4 - 2 = 2 > 0$

مثال ٣

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية

$$s^2 - 3s + 5 = 0$$

الحل

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 5 = 9 - 20 = -11 < 0$$

$$9 - 20 = -11 < 0$$

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

∴ المعاملات أعداد حقيقية

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين مترافقان

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية

$$s^2 + \frac{9}{s} - 6 = 0, s \neq 0$$

الحل

$$s^3 + 9 - 6s = 0, s \neq 0$$

بالضرب في s للطرفين

$$s^3 + 9 - 6s = 0$$

$$s^3 - 6s + 9 = 0$$

$$1 = 0, 6 = 6, 9 = 9$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

∴ الجذران حقيقيان متساويان

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

ومنحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور

السينات في $(0, 3)$

المميز > 0 صفر (سالب) فإن

الجذران مركبين غير حقيقيين

إذا كانت المعاملات: a, b, c أعداد حقيقية

كان الجذران مركبين مترافقين

منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة

لا يقطع مع محور السينات



مثال ٤

أثبت أن جذرى المعادلة :

$٧س - ١١ = ٥ + ٥ = ٥$ مركبان غير حقيقيين ثم
استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين

الحل

$$٥ = ٧ = ١١ = ٥ = ٥$$

$$٥ = ٧ = ١١ = ٥ = ٥$$

$$٥ > ١٩ = ١٤٠ - ١٢١ =$$

الجذران مركبان غير حقيقيين

$$١٩ = ٧ \times ٢ = ١٩$$

$$١٩ = ٧ \times ٢ = ١٩$$

$$١٩ = ٧ \times ٢ = ١٩$$

$$\{ \frac{١٩}{١٤} - \frac{١١}{١٤} , \frac{١٩}{١٤} + \frac{١١}{١٤} \} = ح . م .$$

مثال ٥

أوجد قيمة ١ التي تجعل جذرى المعادلة :

$$٩ = ٩ = ٩ = ٩ = ٩$$

الحل

$$٩ = ٩ = ٩ = ٩ = ٩$$

الجذران متساويان

$$٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

مثال ٦

إذا كان جذرا المعادلة :

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

متساويين فأوجد قيمة ١ الحقيقية ثم أوجد

الجذرين

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

الجذران متساويان

$$٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

$$٥ = ٥ = ٥ = ٥ = ٥$$

عند $2 =$

∴ المعادلة هي :

$$س^2 - 6س + 9 = 0$$

$$(س - 3)^2 = 0 ∴ س = 3$$

$$س = 3$$

عند $2 =$

∴ المعادلة هي :

$$س^2 - 2س + 1 = 0$$

$$(س - 1)^2 = 0 ∴ س = 1$$

$$س = 1$$

∴ الجذران متساويان وكل منهما $1 =$

مثال ٧

أوجد قيم $م$ التي تجعل المعادلة :

جذور حقيقية :

$$(م + 1)س^2 - 2مس + م = 0$$

ليس لها جذور حقيقية

الحل

$$∴ م = 1, م = -1, م = 0$$

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

∴ المميز > 0

$$∴ ب^2 - 4أح > 0$$

$$∴ (-م^2 - 4(م + 1)م > 0$$

$$∴ 4م^2 - 4م - 4 > 0$$

$$∴ 4م^2 - 4م - 4 > 0$$

$$∴ م < -1, م > 1$$

مثال ٨

أثبت أنه لجميع قيم $أ, ب$ يكون جذرا المعادلة

$$(س - 1)(س - 5) = 0$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

$$∴ س^2 - 6س + 5 = 0$$

$$∴ س^2 - 6س + 5 = 0$$

$$المميز = ب^2 - 4أح$$

$$المميز = (-6)^2 - 4(1)(5) = 16$$

$$= 16$$

$$= 16$$

$$= 16$$

$$∴ المقدار (-6)^2 - 4(1)(5) > 0$$

$$∴ المميز > 0$$

∴ جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

ملحوظة

إذا كانت المعاملات : a, b, c ، ح في المعادلة
 $ax^2 + bx + c = 0$ أعداداً نسبية
 وكان المميز مربعاً كاملاً كان الجذران
 حقيقيين نسبين

مثال ١٠

إذا كان : m عددين نسبين فأثبت
 أن جذرى المعادلة :
 $lx^2 + (m - l)x - m = 0$
 عددين نسبين

الحل

$$\because l = m, \quad b = (m - l), \quad c = -m$$

a, b, c أعداد نسبية

\therefore المعاملات أعداد نسبية

$$\therefore, \quad \text{المميز} = b^2 - 4ac$$

$$= (m - l)^2 - 4 \times (-m) \times l$$

$$= l^2 - 2lm + m^2 + 4ml$$

$$= l^2 + 2lm + m^2$$

$$= (l + m)^2$$

$$= \text{مربع كامل}$$

\therefore الجذران نسبين

مثال ٩

أثبت أن : جذرا المعادلة :
 $3x^2 - 5x - 2 = 0$ أعداد نسبية

الحل

$$\because a = 3, \quad b = -5, \quad c = -2$$

\therefore المعاملات أعداد نسبية

$$\therefore, \quad \text{المميز} = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2)$$

$$= 25 + 24 = 49$$

$$= (7)^2 = \text{مربع كامل}$$

\therefore الجذران حقيقيان نسبين



مثال ١١

أوجد قيم العدد الحقيقي k التي تحقق أن

$$\text{المعادلة: } (k-2)(k^2-2k+3) = 0$$

لها جذران مركبان غير حقيقيين

الحل

$$\therefore (k-2) = 0, k^2-2k+3 = 0, k = 2$$

\therefore الجذران نسبيا

$$\therefore \text{المميز} = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8$$

$$\therefore \text{المميز} = 4 - 12 = -8 < 0$$

$$= 4 - 12 = -8 < 0$$

\therefore الجذران مركبان غير حقيقيين

$$\therefore \text{المميز} > 0 \therefore k > 2$$

$$\therefore k > 2 \therefore k \in [3, \infty)$$



في المعادلة: $٣س^٢ + ٥س + ٧ = ٠$

$$٣ = پ ، ٥ = ب ، ٧ = ح$$

$$\frac{٥}{٣} = \frac{ب}{پ} = \text{مجموع الجذرين}$$

٢) حاصل ضرب جذري المعادلة

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} \times \frac{ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = ح \times$$

$$\frac{(ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢})(ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢})}{٢ \times ٢} =$$

$$\frac{(ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢})(ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢})}{٢ \times ٢} =$$

$$\frac{ب^٢ - (٤ - ٢ب + ب^٢)}{٢ \times ٢} =$$

$$\frac{ب^٢ - ٤ + ٢ب - ب^٢}{٢ \times ٢} =$$

$$\frac{٢ب - ٤}{٢ \times ٢} =$$

∴ حاصل ضرب جذري أى معادلة

$$\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } س^٢} = \frac{ح}{پ} =$$

نمثلاً :

في المعادلة: $٣س^٢ + ٥س + ٧ = ٠$

$$٣ = پ ، ٥ = ب ، ٧ = ح$$

$$\frac{٧}{٣} = \frac{ح}{پ} = \text{حاصل ضرب جذري المعادلة}$$

العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

إذا كان ل ، م

التربيعية: $١س^٢ + س + ح = ٠$

فإن :

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = ل$$

$$\frac{ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = م ،$$

ويكون

١) مجموع جذري المعادلة التربيعية

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} + \frac{ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = ل + م$$

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢} + ب + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} =$$

$$\frac{٢ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢} + \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} =$$

مجموع جذري أى معادلة تربيعية

$$\frac{ب - \sqrt{٤ - ٢ب + ب^٢}}{٢} = \frac{ب}{٢} = \frac{\text{معامل } س}{\text{معامل } س^٢}$$



مثال ٢

أوجد قيمة p ، b إذا كان : 2 ، 3 هما جذرا المعادلة $x^2 + px + b = 0$.

الحل

$\therefore 2, 3$ هما جذرا المعادلة

$$\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } x^2} = 2 + 3$$

$$\frac{-p}{1} = 5 \quad \therefore p = -5$$

\therefore حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد الثابت}}{\text{معامل } x^2}$

$$\frac{b}{1} = 2 \times 3$$

$$\frac{b}{1} = 6 \quad \therefore$$

$$b = 6$$

مثال ٣

إذا كان مجموع جذري المعادلة

التربيعية : $x^2 + bx + c = 0$ هو $\frac{5}{2}$ أوجد قيمة b

الحل

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{-b}{a}$$

$$\frac{-b}{2} = \frac{5}{2} \quad \therefore$$

$$-b = 5 \quad \therefore$$

$$b = -5$$

٣ الفرق بين الجذرين

$$= \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \pm$$

مثال ١

إذا كان 2 ، 3 هما جذرا المعادلة

$$x^2 + 5x + 7 = 0$$

فأوجد :

$$(1) \quad 2 + 3 \quad (2) \quad 2 \cdot 3 \quad (3) \quad 2 - 3$$

الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

$$\therefore x^2 + 5x + 7 = 0$$

$$a = 1, b = 5, c = 7$$

$$(1) \quad 2 + 3 = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{1}$$

$$(2) \quad 2 \cdot 3 = \frac{c}{a} = \frac{7}{1}$$

$$(3) \quad 2 - 3 = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \pm$$

$$\pm = \frac{\sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

$$\pm = \frac{\sqrt{25 - 28}}{2}$$

$$\pm = \frac{\sqrt{-3}}{2}$$



مثال ٥

ل ، م هما جذرا المعادلة
 $٢س^٢ - ٦س + ٥ = ٠$ فأوجد قيمة ح
 التي تجعل : ل - م = ٧

الحل

∴ ل ، م هما جذرا المعادلة

$$ل + م = \frac{٦}{٢} = ٣ \leftarrow (١)$$

$$∴ ل م = \frac{٥}{٢} \leftarrow (٢)$$

$$ل - م = ٧ \leftarrow (٣)$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ينتج أن

$$٢ل = ١٠ ∴ ل = ٥$$

بالتعويض في (١)

$$٥ + م = ٣ \leftarrow م = -٢$$

بالتعويض في (٢)

$$∴ ٥ \times (-٢) = \frac{٥}{٢}$$

$$∴ -١٠ = \frac{٥}{٢}$$

$$∴ ح = -١٠$$

مثال ٤

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما
 لكل من المعادلات الآتية

$$(١) س(٣ - س) = ٤$$

$$(٢) (١ + س^٢)(٥ - س) = ٣$$

الحل

$$(١) س(٣ - س) = ٤$$
 بوضع المعادلة

على الصورة العامة

$$∴ س^٢ - ٣س + ٤ = ٠$$

$$∴ س^٢ - ٣س - ٤ = ٠$$

$$∴ ١ = ١ ، ٣ = ٣ ، ح = -١$$

$$∴ \text{مجموع الجذرين} = \frac{٣}{١} = ٣$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{-١}{١} = -١$$

$$(٢) (١ + س^٢)(٥ - س) = ٣$$

بوضع المعادلة على الصورة العامة

$$∴ ٢س^٢ - (٥ - س) \times ١ + (٥ - س) = ٣$$

$$∴ ٢س^٢ - ١٠س + ٥ - س = ٣$$

$$∴ ٢س^٢ - ٩س - ٨ = ٠$$

$$∴ ٢ = ٢ ، ٩ = ٩ ، ح = -٨$$

$$∴ \text{مجموع الجذرين} = \frac{٩}{٢} = \frac{٩}{٢}$$

$$، \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{-٨}{٢} = -٤$$



حل آخر

$$\therefore p = 1, q = -2, r = 0$$

نفرض أن الجذر الآخر هو l

$$\therefore l, (1 + \sqrt{2})n \text{ هما جذرا المعادلة}$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{-b}{a}$$

$$\therefore l + 1 + \sqrt{2}n = -2$$

$$\therefore l = -2 - 1 - \sqrt{2}n = -3 - \sqrt{2}n$$

$$\therefore \text{الجذران هما } -1 - \sqrt{2}n, 1 + \sqrt{2}n$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{1} = (-1 - \sqrt{2}n)(1 + \sqrt{2}n)$$

$$\therefore 1 = -2 - 2n$$

$$\therefore -2 = 2n$$

ملاحظات مهمة

$$(1) \text{ في المعادلة التربيعية: } p x^2 + q x + r = 0$$

$$\text{إذا كان: } p = 1$$

$$\text{فإن: مجموع الجذرين} = -q$$

$$\text{, حاصل ضرب الجذرين} = r$$

$$\text{في المعادلة: } p x^2 + q x + r = 0$$

$$\text{مجموع الجذرين} = -\frac{q}{p}$$

$$\text{, حاصل ضرب الجذرين} = \frac{r}{p}$$

ملحوظة

في المعادلة التربيعية:

$$p x^2 + q x + r = 0 \text{ التي معاملاتها}$$

صورتها حقيقية إذا كان أحد الجذرين عدد

مركب غير حقيقي فإن الجذر الآخر يكون

عدد مركب مرافق له

مثال ٦

إذا كان $(1 + \sqrt{2})n$ هو أحد جذري

$$\text{المعادلة } x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ حيث } x \in \mathbb{C}$$

أوجد

(١) قيمة الجذر الآخر (٢) قيمة: h

الحل

∴ المعاملات حقيقية وأحد الجذرين عدد مركب غير حقيقي

∴ الجذر الآخر مرافق له

$$\therefore \text{الجذر الآخر هو } (-1 - \sqrt{2})n$$

$$\therefore (-1 - \sqrt{2})n, (1 + \sqrt{2})n \text{ هما جذرا المعادلة}$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{1}{1} = (-1 - \sqrt{2})n(1 + \sqrt{2})n$$

$$\therefore 1 = -2 - 2n$$

$$\therefore -2 = 2n$$

(٤) إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة ٢:٣
نفرض أن الجذرين هما : ٢ل ، ٣ل

مثال ٨

إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة :

$$٨س^٢ - ٣س + ٣ = ٠ \text{ هي } ٢:٣$$

والجذرين موجبين أو جدر قيمة ب

الحل

نفرض أن الجذرين هما ٢ل ، ٣ل

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^٢}$$

$$\frac{٣}{٨} = ٢ل + ٣ل$$

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ٥ل$$

$$\therefore ٤٠ = ٣ل \leftarrow (١)$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{٣}{٨}$$

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ٢ل \times ٣ل$$

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ٦ل^٢$$

$$\therefore \frac{١}{١٦} = \frac{١}{٦} \times \frac{٣}{٨} = ٦ل^٢$$

$$\therefore \frac{١}{٤} \pm = ٦ل \leftarrow (٢)$$

بالتعويض من (٢) في (١)

$$\text{عند } ٦ل = \frac{١}{٤}$$

(٢) في المعادلة التربيعية $٨س^٢ - ٣س + ٣ = ٠$

إذا كان أحد جذري المعادلة معكوس بمعنى

للآخر فإن : فإن مجموع الجذرين = صفر

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ٠ \quad \therefore ٠ = ٣$$

(حيث ب معامل س)

(٣) في المعادلة التربيعية $٨س^٢ - ٣س + ٣ = ٠$

إذا كان أحد جذري المعادلة معكوس ضرب

للآخر فإن : حاصل ضرب الجذرين = ١

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ١ \quad \therefore ٨ = ٣$$

مثال ٧

أوجد قيمة ل التي تجعل أحد جذري المعادلة

$$٣س^٢ - (٢-ل)س + (٤+ل) = ٠$$

معكوس ضرب للجذر الآخر

الحل

أحد جذري المعادلة معكوس ضرب للآخر

فإن : حاصل ضرب الجذرين = ١

$$\therefore \frac{٣}{٨} = ١ \quad \therefore ٨ = ٣$$

$$٣ = ٨ ، ٤ + ل = ٣$$

$$\therefore ٣ = ٤ + ل$$

$$٤ - ٣ = ل$$

$$\therefore ١ = ل$$

$$\frac{2}{p} \times 25 = 6 \therefore$$

$$25 = 6 \times p$$

مثال ١٠

أوجد قيمة م التي تجعل أحد جذري المعادلة
 $4x^2 - mx + 7 = 0$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣

الحل

$$4 = p, \quad -m = -, \quad 7 = c$$

نفرض أن الجذرين هما : α, β ، $\alpha + \beta = 3$

$$\frac{-m}{p} = \text{مجموع الجذرين}$$

$$\therefore \frac{-m}{4} = 3 + \alpha + \beta$$

$$\frac{-m}{4} = 3 + \alpha + \beta \quad \text{بالمضروب } 4 \times \text{ للطرفين}$$

$$\therefore m = -12 - 4(\alpha + \beta) \quad \leftarrow (1)$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{p}$$

$$\therefore \alpha \beta = \frac{7}{4} = (3 + \alpha + \beta) \alpha$$

$$\therefore \alpha^2 + 3\alpha + \beta \alpha = \frac{7}{4} \quad \text{بالمضروب } 4 \times \text{ للطرفين}$$

$$\therefore 4\alpha^2 + 12\alpha + 4\beta\alpha = 7$$

$$0 = (7 + 4\alpha)(1 - \alpha)$$

$$\therefore \alpha = 1 \quad \text{أو} \quad \alpha = -\frac{7}{4}$$

$$\therefore \frac{-m}{4} = 1 \quad \text{أو} \quad \frac{-m}{4} = -\frac{7}{4}$$

بالتعويض في (١)

$$\therefore 10 = \frac{1}{4} \times 40 = 10$$

عند $\alpha = -\frac{1}{4}$ مرفوض (لان الجذرين موجبين)

مثال ٩

إذا كانت النسبة بين جذري المعادلة :

$$4x^2 - mx + 7 = 0 \quad \text{كنسبة } 2:3 \text{ أثبت أن}$$

$$25 = 6 \times p$$

الحل

نفرض أن الجذرين هما α, β ، $\alpha + \beta = 3$

$$\frac{-m}{p} = \text{مجموع الجذرين}$$

$$\therefore \frac{-m}{4} = 3 + \alpha + \beta$$

$$\therefore \frac{-m}{4} = 10$$

$$\therefore \frac{-m}{40} = 1 \quad \leftarrow (1)$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{p}$$

$$\therefore \alpha \beta = 10 \times 3 = 30$$

$$\therefore \frac{-m}{4} = 10 \quad \leftarrow (2)$$

بالتعويض من (١) في (٢)

$$\therefore \frac{-m}{4} = 10 \left(\frac{-m}{40} \right)$$

$$\therefore \frac{-m}{4} = 10 \times \frac{1}{40}$$

مثال ١٢

أوجد الشرط اللازم ليكن يكون أحد جذري المعادلة

$$x^2 + px + q = 0$$

مساويا ضعف الجذر الآخر

الحل

∴ أحد الجذرين ضعف الجذر الآخر

∴ نفرض أن الجذرين هما : α ، 2α

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = \text{مجموع الجذرين}$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = \alpha + 2\alpha$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = 3\alpha$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = 3\alpha \quad \leftarrow (1)$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = \text{حاصل ضرب الجذرين}$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = \alpha \times 2\alpha$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = 2\alpha^2 \quad \leftarrow (2)$$

بالتعويض من (1) في (2)

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = (3\alpha)^2$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha} = (9\alpha^2)$$

بالضرب في $2\alpha^2$ للطرفين

$$2\alpha^2 \times \frac{\alpha}{2\alpha} = 2\alpha^2 \times 9\alpha^2$$

$$2\alpha^2 = 18\alpha^2$$

وهذا هو الشرط اللازم لكي يكون أحد جذري

المعادلة: $x^2 + px + q = 0$ ضعف الجذر

الآخر

$$\frac{1}{2} = \alpha$$

$$12 + 4 = 12 + \frac{1}{2} \times 8 = 2$$

$$16 = 2$$

$$\frac{7}{2} = \alpha$$

$$12 + 28 = 12 + \frac{7}{2} \times 8 = 2$$

$$16 = 2$$

$$16 \pm 2$$

مثال ١١

أوجد قيمة p التي تجعل مجموع جذري المعادلة :

$$x^2 - (2+p)x + 6 = 0$$

$$\text{يساوي حاصل ضرب جذري المعادلة } x^2 + 5x + p = 0$$

الحل

$$\frac{2+p}{1} = \text{مجموع جذري المعادلة الأولى}$$

$$2+p =$$

$$\frac{2p}{1} = \text{حاصل ضرب جذري المعادلة الثانية}$$

$$2+p = 2p$$

$$0 = 2 - p - 2p$$

$$0 = (2-p)(1+p)$$

$$2=p$$

أو

$$1=-p$$



تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

بالضرب $\times 6$ للطرفين

$$\therefore 6s^2 - 13s + 6 = 0$$

(٤) بفرض أن جذري المعادلة هما $ل$ ، $م$

$$ل = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6}$$

$$\therefore ل = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 144}}{12}$$

$$ل = \frac{-2 \pm \sqrt{140}}{12} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{35}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{35}}{6}$$

$$م = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6}$$

$$\therefore م = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 144}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{140}}{12} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{35}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{35}}{6}$$

$$مجموع الجذرين = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$مجموع الجذرين = -\frac{1}{3} = (ل - م) + ل = 2ل - م$$

$$مجموع الجذرين = 2ل - م = -\frac{1}{3}$$

$$ل = -\frac{1}{3} + م$$

$$\therefore \text{المعادلة هي : } 6s^2 - 13s + 6 = 0$$

إذا كانت $ل$ ، $م$ هما جذرا معادلة تربيعية فإن

المعادلة هي :

$$س^2 - (ل + م)س + ل \cdot م = 0$$

$$س^2 - (\text{مجموع الجذرين})س + \text{حاصل ضربيهما} = 0$$

مثال ١

$$(١) ٣ ، ٥$$

$$(٢) \sqrt{3} + 2 ، \sqrt{3} - 2$$

$$(٣) \frac{2}{3} ، \frac{3}{2}$$

$$(٤) \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 6 \times 6}}{2 \times 6}$$

الحل

$$(١) \text{ مجموع الجذرين } = 3 + 5 = 8$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين } = 3 \times 5 = 15$$

$$\therefore \text{المعادلة هي : } س^2 - 8س + 15 = 0$$

$$(٢) \text{ مجموع الجذرين } = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - 2 = 2\sqrt{3}$$

$$\text{وحاصل ضرب الجذرين } = (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) = 3 - 4 = -1$$

$$\therefore \text{المعادلة هي : } س^2 - 2\sqrt{3}س - 1 = 0$$

$$(٣) \text{ مجموع الجذرين } = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين } = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\therefore \text{المعادلة هي : } س^2 - \frac{17}{6}س + 1 = 0$$

∴ ل، م هما جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\therefore \begin{cases} 5 = ل + م \\ 2 = ل \cdot م \end{cases}$$

$$(1) \therefore ل^2 + م^2 = (ل + م)^2 - 2ل \cdot م$$

$$21 = 5^2 - 2 \times 2 = (ل + م)^2 - 2ل \cdot م$$

$$(2) \sqrt{(ل + م)^2 - 2ل \cdot م} = \sqrt{5^2 - 2 \times 2} = \sqrt{17}$$

$$= \sqrt{17}$$

$$\pm \sqrt{17} = \pm \sqrt{5^2 - 2 \times 2}$$

$$(3) (ل + م)^2 - 2ل \cdot م = 5^2 - 2 \times 2$$

$$[5^2 - 2 \times 2] \times 5 =$$

$$95 = 19 \times 5 = [5^2 - 2 \times 2] \times 5$$

$$(4) \therefore \frac{ل + م}{ل \cdot م} = \frac{5}{2} + \frac{1}{ل \cdot م}$$

$$\frac{(ل + م)^2 - 2ل \cdot م}{ل \cdot م} =$$

$$\frac{5^2 - 2 \times 2}{2} =$$

$$\frac{21}{2} = \frac{5^2 - 2 \times 2}{2} =$$

$$(5) \therefore \frac{ل + م}{ل \cdot م} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{م}$$

$$\frac{5}{2} =$$

(6) ∴ ل، م جذرا للمعادلة:

س² - 5س + 2 = 0 ∴ يحقق تسادس طرفيها

$$\therefore ل^2 - 5ل + 2 = 0$$

$$\therefore ل^2 - 5ل = -2$$

$$\therefore \text{القادر} = (ل^2 - 5ل) + 9 =$$

$$7 = 9 + (-2) =$$

بعض العلاقات المهمة

$$(1) ل^2 + م^2 = (ل + م)^2 - 2ل \cdot م$$

$$(2) (ل - م)^2 = (ل + م)^2 - 4ل \cdot م$$

$$(3) (ل + م)^2 - 2ل \cdot م = (ل + م)^2 - 2ل \cdot م$$

$$(4) (ل - م)^2 = (ل + م)^2 - 4ل \cdot م$$

$$(5) \frac{ل + م}{ل \cdot م} = \frac{1}{ل} + \frac{1}{م}$$

$$(6) \frac{(ل + م)^2 - 2ل \cdot م}{ل \cdot م} = \frac{ل^2 + م^2}{ل \cdot م} = \frac{ل}{م} + \frac{م}{ل}$$

$$(7) \frac{\sqrt{(ل + م)^2 - 2ل \cdot م}}{ل \cdot م} \pm = \frac{1}{ل} \pm \frac{1}{م}$$

مثال 2

إذا كانت ل، م هما جذرا المعادلة

س² - 5س + 2 = 0 فأوجد قيمة المقادير الآتية

$$(1) ل^2 + م^2$$

$$(2) ل - م$$

$$\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل}$$

$$(3) ل^2 + م^2$$

$$(4) \frac{1}{ل} + \frac{1}{م}$$

$$(5) \frac{1}{ل} + \frac{1}{م}$$

$$(6) ل^2 - 5ل + 2$$

$$(7) ل^2 - 5ل + 2 = 0$$

$$(8) ل^2 - 5ل + 2 = 0$$

الحل

∴ ل، م هما جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\therefore \begin{cases} 5 = ل + م \\ 2 = ل \cdot م \end{cases}$$



∴ حاصل ضرب جذري العادلة ،
 المطلوبة = $ل^2 م^2 = (ل م)^2 = (-2)^2 = 4$
 ∴ العادلة المطلوبة هي :
 $س^2 - 13س + 4 = 0$
 $س^2 - 13س + 4 = 0$

مثال ٤

إذا كانت ل، م هما جذرا العادلة
 $س^2 - 6س + 8 = 0$

فكرونا العادلة التي جذراها : ل + ١ ، م + ١

الحل

من العادلة العطا :
 ∴ مجموع الجذرين = $\frac{-b}{a} = \frac{6}{1} = 6$
 ∴ $ل + م = 6$

∴ $ل + م = 6$

، حاصل ضرب الجذرين $(ل م) = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$

∴ $ل م = 8$

∴ جذرا العادلة المطلوبة هما ل + ١ ، م + ١

∴ مجموع الجذرين $(ل + ١) + (م + ١) = ١٠$

$ل + م + ٢ = ١٠$

$ل + م = ٨$

∴ حاصل ضرب الجذرين $(ل + ١)(م + ١) = ١٥$

$ل م + ل + م + ١ = ١٥$

$٨ + ١ + ٨ = ١٥$

∴ العادلة هي : $س^2 - ١٠س + ٨ = 0$

(٧) ∴ القدار = $ل^2 - ٥ل + ٢ = ٠$

∴ القدار = $ل^2 - ٥ل + ٢ = ٠$

$ل^2 + م^2 + (ل م) = ٢ + ٥ = ٧$

$(ل + م)^2 - ٢ل م = ٧ + ٢ = ٩$

$(٢ - ٢) + ٢ \times ٢ = ٩$

$١٧ = ٨ - ٢٥ = ٤ - ٤ - ٢٥ = ١٧$

(٨) ∴ القدار = $س^2 - ٤س + ٣ = ٠$

بإضافة : م ، $س - م$ للمقدار

القدار = $س^2 - ٤س + م - م + ٣ = ٠$

$س^2 - ٥س + (ل + م) + ٣ = ٠$

$٦ = ٣ + ٥ + ٢ = ١١$

مثال ٣

إذا كانت ل ، م هما جذرا العادلة :

$س^2 + ٣س - ٢ = ٠$

فكرونا العادلة التي جذراها : ل ، م

الحل

∴ ل ، م هما جذرا العادلة العطا

∴ $ل + م = -٣$

، $ل م = -٢$

∴ مجموع جذري العادلة المطلوبة = $ل^2 + م^2$

$(ل + م)^2 - ٢ل م = (-٣)^2 - ٢(-٢) = ٩ + ٤ = ١٣$

$(٣ - ٣) \times ٢ = ١٣$

$١٣ = ٩ + ٤ = ١٣$



مثال ٦

إذا كان الفرق بين جذري المعادلة

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \text{ هو } \frac{3}{2}$$

فأوجد قيمة : n

الحل

بفرض أن جذري المعادلة العطا هما n, m

$$\therefore n + m = \frac{9}{2}$$

$$n - m = \frac{3}{2}$$

$$\therefore n - m = \frac{3}{2} \text{ بالتربيع للطرفين}$$

$$\frac{9}{4} = (n - m)^2$$

$$\therefore (n + m)^2 - 4nm = \frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{4} = \left(\frac{9}{2} \right)^2 - 4nm$$

$$\frac{9}{4} = \frac{81}{4} - 4nm \text{ بالضرب } \times 4$$

$$9 = 81 - 16nm$$

$$9 = 81 - 16nm$$

$$9 = 81 - 16nm$$

$$9 - 81 = -16nm$$

$$-72 = -16nm$$

$$\therefore nm = \frac{72}{16} = \frac{9}{2}$$

حل آخر

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \text{ ، } x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2}$$

$$\therefore n - m = \frac{3}{2}$$

$$n - m = \frac{3}{2}$$

مثال ٥

إذا كان n, m هما جذرا المعادلة :

$$x^2 - 11x + 3 = 0$$

فكرونا المعادلة التي جذراها : n, m

الحل

$$n = 1, m = 11, n = 3, m = 3$$

\therefore جذري المعادلة العطا هما : n, m

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{11}{1}$$

$$\therefore n + m = 11$$

$$\therefore n + m = 11$$

$$\therefore n + m = 7 \text{ (1)}$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{3}{1}$$

$$\therefore (n + m)(n - m) = 3$$

$$\therefore n + m = 3$$

$$\therefore n + m = 1 \text{ (2)}$$

بالتعويض من (1) في (2)

$$\therefore n + m = 7$$

$$\therefore n + m = 14$$

$$\therefore n + m = 15 \text{ (3)}$$

\therefore المعادلة المطلوبة جذراها : n, m

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = n + m = 7$$

$$\therefore \text{حاصل ضرب الجذرين} = n + m = 15$$

\therefore المعادلة المطلوبة هي

$$x^2 - 7x + 15 = 0$$

$$x^2 - 7x + 15 = 0$$



$$\frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}} =$$

$$\frac{(m+n) \cdot \frac{1}{mn}}{\frac{1}{mn}} =$$

$$\frac{(1-3) \cdot \frac{1}{(1-)}}{\frac{1}{(1-)}} =$$

$$11 = 2 + 9 =$$

، حاصل ضرب الجذرين $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n} =$

$$\frac{1}{(m \cdot n)} =$$

$$1 = \frac{1}{(1-)} =$$

∴ المعادلة هي : $11 - 2 = 1 + 0 =$

مثال ٨

كون المعادلة التربيعية التي يزيد كل من
جذريها بمقدار ١ عن جذري المعادلة
س٢ - س٧ - س٩ = ٠

الحل

نفرض أن جذري المعادلة العطا هما : l ، m

$$\therefore l + m = 7 \quad , \quad l - m = 9$$

∴ جذرا المعادلة المطلوبة هما

$$l + 1 \quad , \quad m + 1$$

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = l + 1 + m + 1 =$$

$$2 + m + l =$$

$$9 = 2 + 7 =$$

$$\frac{\sqrt{(9-4) \times 2 \times 4} \pm \frac{3}{2}}{2} =$$

بالضرب $\times 2$ للطرفين

$$\sqrt{(9-4) \times 2 \times 4} \pm 3 =$$

$$\therefore \sqrt{8-32-81} \pm 3 =$$

$$\therefore \sqrt{8-49} \pm 3 = \text{بالتربيع للطرفين}$$

$$\therefore 8-49 = 9$$

$$\therefore 8-49 = 9$$

$$\therefore 8 = 40$$

$$\therefore 8 = 0$$

مثال ٧

إذا كان l ، m هما جذرا المعادلة

$$s^2 - 3s - 1 = 0$$

كون المعادلة التي جذراها $\frac{1}{l}$ ، $\frac{1}{m}$

الحل

من المعادلة العطا :

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = \frac{-b}{a} =$$

$$\therefore l + m = 3$$

$$\text{، حاصل ضرب الجذرين} = \frac{c}{a} =$$

$$\therefore l \cdot m = -1$$

∴ المعادلة المطلوبة جذراها : $\frac{1}{l}$ ، $\frac{1}{m}$

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} =$$



مثال ١٠

إذا كان $ل$ ، $م$ هما جذرا المعادلة :

$$٤س^٢ - ٣س + ١ = ٠$$

وكانت: $ل^٢ + م^٢ = ٣$ فادع قيمة $م$

الحل

$\therefore ل$ ، $م$ هما جذرا المعادلة

$$\frac{س}{١} = ل + م ،$$

$$\therefore ل + م = \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٨}$$

$$ل م = \frac{٣}{٨}$$

$$\therefore ل م = \frac{٣}{٨}$$

$$\therefore ل^٢ + م^٢ = ٣$$

$$\therefore (ل + م)^٢ - ٢ل م = ٣$$

$$\therefore (ل + م)^٢ = ٣ + ٢ل م$$

$$\left(\frac{١}{٤}\right)^٢ = ٣ + ٢ \times \frac{٣}{٨}$$

$$\frac{١}{١٦} = ٣ + \frac{٣}{٤}$$

$$\therefore ١ = ١٦ + ١٢$$

$$\therefore ١ = ٢٨$$

مثال ١١

إذا كان $ل$ ، $م$ هما جذرا المعادلة :

$$٤س^٢ - ٣س + ١ = ٠$$

وكانت: $ل + م = ١$ فادع قيمة $ل$

الحل

، حاصل ضرب الجذرين $(١ + ل) (١ + م) =$

$$١ + ل + م + ل م =$$

$$١ - = ١ + ١ + (٩ -) =$$

\therefore المعادلة هي : $٠ = ١ - ٩س - ١ = ٠$

مثال ٩

إذا كان $ل$ ، $م$ هما جذري المعادلة

$$٨س^٢ - ٣س + ١ = ٠$$

وكانت $ل < م$ كون المعادلة التي جذراها $ل - ١$ ، $م + ٢$

الحل

نوجد جذري المعادلة العكسة :

$$٨س^٢ - ٣س + ١ = ٠$$

$$٠ = (٢س + ١)(٤س - ١)$$

$$٠ = ٢س + ١ \quad \text{أو} \quad ٠ = ٤س - ١$$

$$\therefore ٢س = -١ \quad \text{أو} \quad ٤س = ١$$

$$\therefore ل < م$$

$$\therefore ل = -\frac{١}{٢} ، م = \frac{١}{٤}$$

\therefore المعادلة المطلوبة جذراها : $ل - ١$ ، $م + ٢$

\therefore مجموع الجذرين $ل - ١ + م + ٢ =$

$$= ل + م + ١ =$$

$$= -\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + ١ =$$

، حاصل ضرب الجذرين $(ل - ١)(م + ٢) =$

$$= (-\frac{١}{٢} - ١)(\frac{١}{٤} + ٢) =$$

\therefore المعادلة هي : $٠ = ٣ + ٤س - ١ = ٠$



الحل

∴ ل، م هما جذرا المعادلة

$$\frac{2}{m} = m + l \quad \therefore 2 = m + l$$

$$l = m \quad \therefore \frac{2}{m} = m \quad \therefore 2 = m^2$$

∴ جذرا المعادلة المطلوبة هما ل + م ، ل م

$$\therefore \text{مجموع الجذرين} = l + m + l = 2m$$

$$= 2 + 2 = 4$$

∴ حاصل ضرب الجذرين = (ل + م)(ل م)

$$= 2 \times 2 = 4$$

∴ المعادلة هي : $x^2 - 4x + 4 = 0$

مثال ١٢

إذا كانت : $\frac{2}{m}$ ، $\frac{2}{l}$ هما جذرا المعادلة

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

فأوجد المعادلة التي جذراها : ل ، م

الحل

$$\therefore \frac{2}{m} ، \frac{2}{l} \text{ هما جذرا المعادلة المعطاة}$$

$$\therefore \frac{2}{m} \times \frac{2}{l} = 4$$

$$\therefore \frac{4}{ml} = 4 \quad \therefore l = m$$

$$6 = \frac{2}{m} + \frac{2}{l}$$

$$\therefore 6 = \frac{2m + 2l}{ml} \quad \therefore 6 = \frac{2(m+l)}{ml}$$

$$\therefore 6 = \frac{(m+l) \cdot 2}{1} \quad \text{بالقسمة على ٢ للطرفين}$$

$$3 = m + l$$

∴ ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة

$$\therefore 3 = m + l$$

$$l = m$$

∴ المعادلة هي

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

إشارة الدالة

ملاحظات مهمة

(١) في الفترة التي يقع فيها منحنى الدالة أعلى محور السينات تكون الدالة موجبة في هذه الفترة

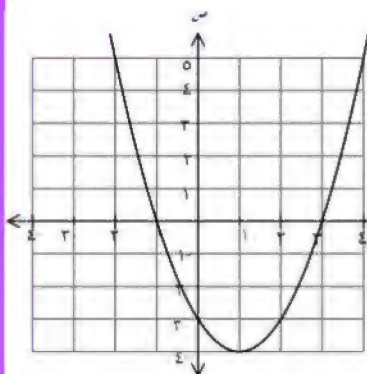
(٢) إذا كان : منحنى الدالة يقطع محور السينات في (٠، ٢) ، (٠، ٣) فإن :

$d(x) = 0$ عندما $x \in \{2, 3\}$

(٣) في الفترة التي يكون فيها منحنى الدالة يقع أسفل محور السينات تكون الدالة سالبة في هذه الفترة

فمثلاً

في الشكل المقابل :



(١) منحنى الدالة

يقع فوق محور السينات في الفترة :

$[-3, 0] \cup [2, \infty)$

في الدالة موجبة في $[-3, 0] \cup [2, \infty)$

(٢) منحنى الدالة يقطع محور السينات في

$(0, 1)$ ، $(3, 0)$

$\therefore d(x) = 0$ عندما $x \in \{0, 3\}$

(٣) منحنى الدالة يقع أسفل محور السينات

في الفترة : $[-1, 3]$

\therefore الدالة تكون سالبة في الفترة $[-1, 3]$

إذا كانت : $d(x) = 0$

فإنه يقصد بإشارة الدالة قيم x التي تجعل

(١) $d(x)$ موجبة

(٢) $d(x)$ سالبة

(٣) $d(x) = 0$ صفر

أولاً : إشارة الدالة الثابتة

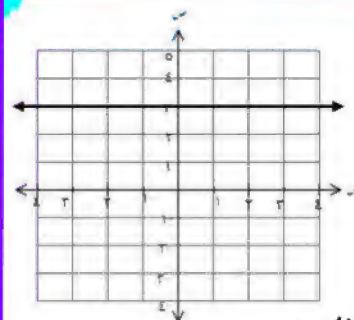
إذا كانت : $d(x) = a$ حيث $a \neq 0$ ، $a \in \mathbb{R}$

فإن إشارة الدالة هي نفس إشارة a لجميع قيم x الحقيقية

(١) إشارة الدالة : $d(x) = 5$ تكون في

(٢) إشارة الدالة : $d(x) = -2$ تكون في

(٣) الدالة : $d(x) = x^2 - 4$ تكون في الفترة

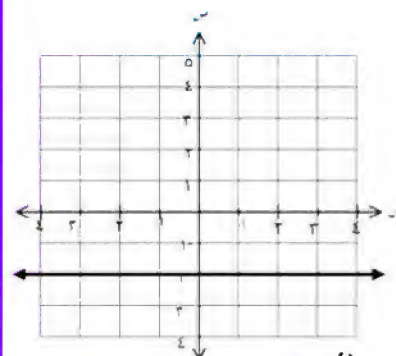


(٤) الشكل المقابل

يمثل الدالة :

$d(x) = \dots\dots\dots$

وإشارة الدالة تكون في x



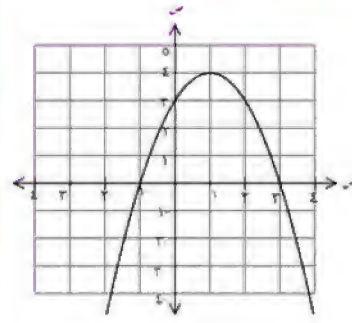
(٥) الشكل المقابل

يمثل الدالة :

$d(x) = \dots\dots\dots$

وإشارة الدالة تكون في x

مثال ١



الشكل المقابل
يمثل منحنى دالة
المتكامل ما يأتي

(١) د (س) < ٠ في

(٢) د (س) > ٠ في

(٣) د (س) = ٠ في الفترة

ثانياً : إشارة الدالة الخطية

الدالة د : د (س) = أ + س + ب

$$= (س + \frac{ب}{أ}) + \frac{أ}{أ}$$

تكون

(١) د (س) = ٠ عندما س = $-\frac{ب}{أ}$

(٢) د (س) لها نفس إشارة أ عندما س < $-\frac{ب}{أ}$

(٣) د (س) تخالف إشارة أ عندما س > $-\frac{ب}{أ}$

مثال ٢

اجمعت إشارة الدالة د : د (س) = س^٣ - س - ٢

الحل

بوضع د (س) = ٠

$$\therefore س^٣ - س - ٢ = ٠$$

$$\therefore س^٣ = س + ٢$$

$$\therefore س = \frac{٢}{٣}$$

$$(١) د (س) = ٠ \text{ عندما } س = \frac{٢}{٣}$$

$$(٢) د (س) < ٠ \text{ عندما } س \in] \frac{٢}{٣}, \infty [$$

$$(٣) د (س) > ٠ \text{ عندما } س \in] \frac{٢}{٣}, \infty [$$

مثال ٣

عين إشارة الدالة د : د (س) = س^٢ - ٦س + ٩

الحل

بوضع د (س) = ٠

$$\therefore س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$$

$$\therefore س^٢ - ٦س + ٩ = ٠$$

$$\therefore س = ٣$$

$$(١) د (س) = ٠ \text{ عندما } س = ٣$$

$$(٢) د (س) > ٠ \text{ عندما } س \in] ٣, \infty [$$

$$(٣) د (س) < ٠ \text{ عندما } س \in] ٣, \infty [$$

ثالثاً : إشارة الدالة التربيعية

ليكن إشارة الدالة التربيعية د :

$$د (س) = ا س^٢ + ب س + ج$$

$$\text{نوجد المميز } \Delta = ب^٢ - ٤ ا ج$$

وتوجد ثلاث حالات

(١) إذا كان المميز < ٠

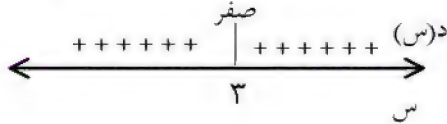
∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

نوجد هذين الجذرين (بالتعليل - القانون

العام - بالحاسبة) وليكن :

$0 = 36 - 36 = 9 \times 4 - 36 = (-6) =$
 \therefore للمعادلة جذران حقيقيان متساويان وكل منهما

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$$



$$(1) \text{ د (س) } = \text{ صفر عندما } س = \frac{1}{3}$$

$$(2) \text{ د (س) } < 0 \text{ عندما } س \in -\infty, -\frac{1}{3}$$

(3) إذا كان المميز $0 >$

\therefore ليس للمعادلة جذور حقيقية

والدالة تكون

لها نفس إشارة a لجميع قيم $س$ الحقيقية

مثال ٧

$$اجتأ إشارة الدالة د: د (س) = س^2 - 3س + 9$$

الحل

$$0 = \text{بوضع د (س)}$$

$$\therefore س^2 - 3س + 9 = 0$$

$$\therefore \Delta = 9 - 36 = -27 < 0$$

$$\text{المميز} = س^2 - 3س + 9$$

$$= (-3) = 9 - 36 = -27 < 0$$

ليس للمعادلة جذور حقيقية

\therefore الدالة لها نفس إشارة معامل $س^2$

لجميع قيم $س$ الحقيقية

$$0 < \Delta$$

$$\therefore \text{د (س) } < 0 \text{ عندما } س < 0$$

$$(1) \text{ د (س) } = 0 \text{ عندما } \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

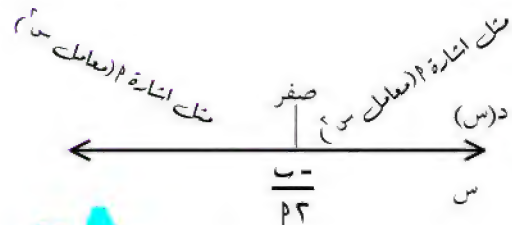
$$(2) \text{ د (س) } > 0 \text{ عندما } س \in [1, 4]$$

$$(3) \text{ د (س) } < 0 \text{ عندما } س \in -\infty, -1 \cup [4, \infty)$$

(2) إذا كان المميز $0 =$

\therefore للمعادلة جذران حقيقيان

متساويان وكل منهما $\frac{-b}{2a}$



$$(1) \text{ د (س) } = \text{ صفر عندما } س = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \text{ د (س) } > 0 \text{ عندما } س \in [1, 4]$$

$$\text{عندما } س \in -\infty, -1 \cup [4, \infty)$$

مثال ٦

$$اجتأ إشارة الدالة د: د (س) = س^2 - 6س + 9$$

الحل

$$\text{بوضع د (س) } = 0$$

$$\therefore س^2 - 6س + 9 = 0$$

$$\therefore \Delta = 36 - 36 = 0$$

$$\text{المميز} = س^2 - 6س + 9$$

مثال ٩

إذا كانت :

$$د(س) = س^2 - 6س + 5, \quad ر(س) = س^2 - 4س - 5$$

فعين الفترات التي تكون فيها الدالتين

موجبتيين معا

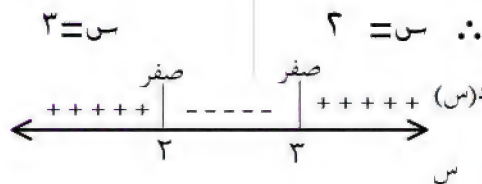
الحل

نبحث إشارة الدالة د :

$$\text{بوضع : } س^2 - 6س + 5 = 0$$

$$\therefore د(س) = (س - 3)(س - 2)$$

$$\text{إما } س = 2 \quad \text{أو} \quad س = 3$$

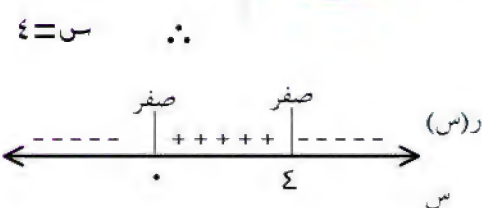


نبحث إشارة الدالة ر

$$\text{بوضع : } س^2 - 4س - 5 = 0$$

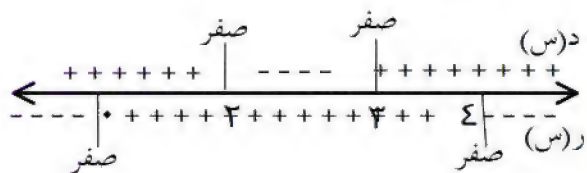
$$\therefore ر(س) = (س - 5)(س + 1)$$

$$\text{إما } س = 5 \quad \text{أو} \quad س = -1$$



يبحث إشارة الدالتين على خط أعداد واحد

كما بالسكّل :



نلاحظ أن الدالتين موجبتين معاً في :

$$[0, 2] \cup [3, 5]$$

مثال ٨

أبحث إشارة الدالة د :

$$د(س) = س^2 - 8س + 15 \text{ على الفترة } [1, 7]$$

الحل

نضع : د(س) = 0

$$\therefore س^2 - 8س + 15 = 0$$

$$\therefore 1 = 3, \quad 8 = 4, \quad 15 = 5$$

$$\therefore \text{المميز } \Delta = 64 - 60 = 4$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$\therefore 3 \text{ أو } 5$$

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

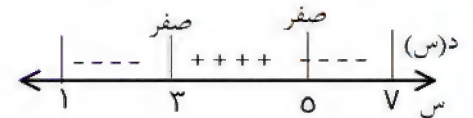
$$\therefore س^2 - 8س + 15 = 0 \text{ بالضرب } (س - 3)(س - 5)$$

$$\therefore د(س) = (س - 3)(س - 5)$$

$$\therefore 3 = 5 \quad \text{أو} \quad 5 = 3$$

$$\therefore 3 = 5 \quad \text{أو} \quad 5 = 3$$

$$\therefore 3 = 5 \quad \text{أو} \quad 5 = 3$$



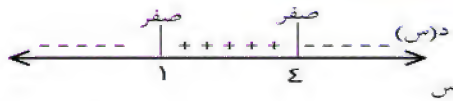
$$(1) \text{ د(س) = 0 عندما } س \in \{3, 5\}$$

$$(2) \text{ د(س) > 0}$$

$$\text{عندما } س \in [3, 5] \text{ أو } س \in [5, 7]$$

$$(3) \text{ د(س) < 0 عندما } س \in [3, 5]$$

حل متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد في ح



$$\therefore \text{د (س) } < 0 \text{ عندما } \text{س} \in] 1 , 4 [$$

$$\therefore \text{م. ح} =] 1 , 4 [$$

مثال ٢

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

$$\text{س}^2 \leq \text{س} - 9$$

الحل

$$\therefore \text{س}^2 - \text{س} - 9 \leq 0$$

$$\text{بوضع د (س) = س}^2 - \text{س} - 9$$

$$\therefore \text{س} = 1, \text{س} = -6, \text{س} = 9$$

$$\therefore \text{المميز} = 25 - 4 \times (-9) = 73$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{2}$$

$$\therefore \text{للمعادلة د (س) = 0 جذران متساويان}$$

$$\text{د (س) = 0 : س} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{2}$$

$$\text{س} = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{2} = 3$$

$$\therefore \text{د (س) } < 0 \text{ عندما } \text{س} \in] 3 , -3 [$$

$$\text{د (س) = 0 عندما } \text{س} = 3$$

$$\therefore \text{د (س) } \leq 0 \text{ عندما } \text{س} \in] 3 , -3 [$$

$$\therefore \text{مجموعة الحل} = \text{ح}$$

$$\text{س}^2 + \text{س} + 1 < 0$$

(١) نجعل أحد طرفي المتباينة = صفر

(٢) نوجد الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

$$\text{وهي د (س) = س}^2 + \text{س} + 1$$

(٣) نبصت إشارة هذه الدالة

(٤) نوجد قيم س التي تجعل القدر :

$$\text{س}^2 + \text{س} + 1 < 0$$

مثال ١

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

$$\text{س}^2 + 4 < 0$$

الحل

١- بوضع المتباينة

$$\text{س}^2 + \text{س} + 1 < 0$$

$$\therefore \text{س}^2 - 5\text{س} + 4 < 0$$

٢- الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي

$$\text{د (س) = س}^2 - 5\text{س} + 4$$

٣- نبصت إشارة هذه الدالة

بوضع :

$$\text{س}^2 - 5\text{س} + 4 = 0$$

$$(4 - \text{س})(1 - \text{س}) = 0$$

$$\text{أو } \text{س} = 1$$

$$\text{س} = 1$$

$$\text{أو } \text{س} = 4$$

$$\therefore \text{س} = 4$$

مثال ٣

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة

$$(3+s)^2 - 10 \leq (3+s)^3$$

الحل

$$s^2 + 6s + 9 - 10 \leq s^3 + 9s^2 + 27s + 27$$

$$s^2 + 6s - 1 \leq s^3 + 9s^2 + 27s + 27$$

$$\therefore s^3 + 8s^2 + 21s + 28 \geq 0$$

$$\text{بوضع د(س) = } s^3 + 8s^2 + 21s + 28$$

$$= (s+1)(s+8)$$

$$\therefore \text{هذرا المعادلة د(س) = 0}$$

$$\text{هما } s = -1, \quad s = -8$$

المقدار $(s^3 + 8s^2 + 21s + 28)$ يكون أكبر من الصفر

$$s \in (-\infty, -8) \cup (-1, \infty)$$

$$\text{والمقدار = صفر عندما } s \in \{-1, -8\}$$

$$\therefore \text{م.ح} = (-\infty, -8) \cup \{-1, -8\} \cup (-1, \infty)$$

$$= (-\infty, -8] \cup [-1, \infty)$$



سلسلة الفاروق

فى

حساب المثلثات

للمصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الأول

ت/ ٠١١٥٦٣٤٤٤٣١

إعداد : أ/عشري فاروق



www.Cryp2Day.com

موقع مذكرات جاهزة للطباعة

الزاوية الموجهة

حساب مثلثات

القياس الموجب والقياس السالب
للزاوية الموجهة

يرسم داخل الزاوية الموجهة سهم يشير
من الضلع الابتدائي الى الضلع النهائي

:

أ إذا كان اتجاه السهم في اتجاه دوران
عقارب الساعة كان قياسها سالبا



ب إذا كان السهم في اتجاه عكس اتجاه
دوران عقارب الساعة كان قياسها موجبا



الشكل المقابل

يمثل: \angle أو θ الموجهة
وهي زاوية قياسها
موجب

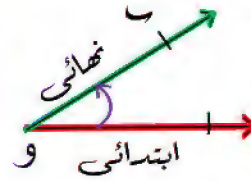
الشكل المقابل

يمثل: \angle أو θ الموجهة
وهي زاوية قياسها
موجب

الزاوية الموجهة:

هي زوج مرتب من شعاعين لهما نفس
نقطة البداية ويسمى السقط الأول الضلع
الابتدائي ويسمى السقط الثاني الضلع
النهائي

الشكل المقابل



يمثل: \angle أو θ الموجهة

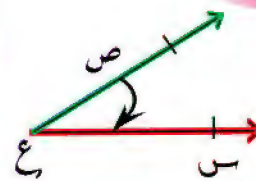
ويمكن التعبير عنها كزوج مرتب:

(\vec{OA}, \vec{OB})

ويسمى:

الضلع: \vec{OA} الضلع الابتدائي
والضلع: \vec{OB} الضلع النهائي

مثال ١



في الشكل المقابل:

أكمل ما يأتي:

١ الشكل يمثل: \angle الموجهة

٢ يعبر عن هذه الزاوية بالزوج المرتب:

(.....,)

٣ الضلع الابتدائي هو

٤ الضلع النهائي هو



الحل

١

القياس الموجب للزاوية التي قياسها

$$^{\circ} 360 + ^{\circ} 60 - = (^{\circ} 60 -)$$

$$^{\circ} 300 =$$

٢

القياس السالب للزاوية الموجبة التي

$$^{\circ} 360 - ^{\circ} 120 = (^{\circ} 120)$$

$$^{\circ} 240 - =$$

٣

القياس الموجب للزاوية التي قياسها

$$^{\circ} 360 + ^{\circ} 300 - = (^{\circ} 300 -)$$

$$^{\circ} 60 =$$

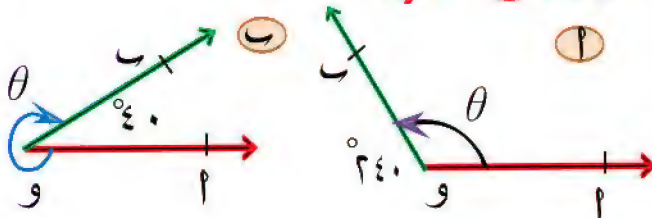
٤

القياس السالب للزاوية الموجبة التي

$$^{\circ} 360 - ^{\circ} 105 = (^{\circ} 105)$$

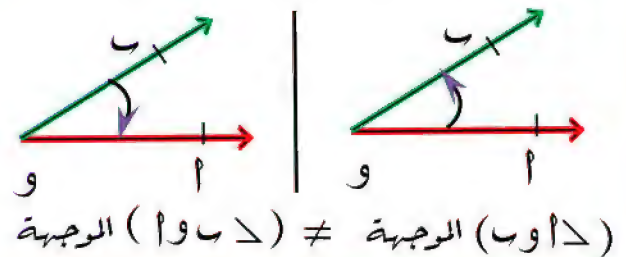
$$^{\circ} 255 - =$$

مثال ٣

أوجد قياس الزاوية (θ) في كل من
الأمثلة التالية

∴ للزاوية الموجبة قياسان أحدهما موجب

والآخر سالب ويكون

القياس الموجب + القيمة المطلقة للقياس السالب = $^{\circ} 360$ الزاوية التي قياسها الموجب = $^{\circ} 150$ يكون قياسها السالب = $^{\circ} 360 - ^{\circ} 150 =$
 $^{\circ} 210 - =$ الزاوية التي قياسها السالب = $^{\circ} 72 - =$ يكون قياسها الموجب = $^{\circ} 360 + ^{\circ} 72 - =$
 $^{\circ} 288 =$ الزاوية التي قياسها الموجب = θ يكون قياسها السالب = $^{\circ} 360 - \theta =$ الزاوية التي قياسها السالب = $\theta - =$ يكون قياسها الموجب = $^{\circ} 360 + \theta - =$ 

مثال ٢

أوجد القياس الآخر للزاوية الموجبة التي
قياساتها كالتالي

$$^{\circ} 60 - \text{ ١}$$

$$^{\circ} 120 \text{ ٢}$$

$$^{\circ} 300 - \text{ ٣}$$

$$^{\circ} 105 \text{ ٤}$$

الحل

١

∴ اتجاه السهم في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ θ قياسها موجباً

$$\theta = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

ب

اتجاه السهم في اتجاه دوران عقارب الساعة

θ قياسها سالبا

$$\theta = -(360^\circ - 40^\circ) = -320^\circ$$

الوضع القياسي للزاوية الموجهة

تكون الزاوية الموجهة مرسومة في الوضع القياسي إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

- ١ رأسها نقطة الأصل (و)
 - ٢ ضلعها الابتدائي هو الجزء الموجب لمحور السينات
- في الوضع القياسي

الشكل المقابل :
يمثل \angle أو θ الموجهة

- رأسها نقطة الأصل (و)
- ضلعها الابتدائي هو \overrightarrow{OA} ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

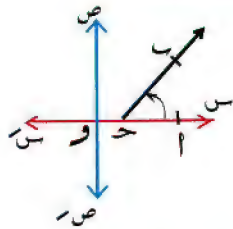
- ضلعها النهائي هو \overrightarrow{OB}

- السهم الرسوم بدائليها في عكس اتجاه دوران الساعة

∴ قياسها موجب

مثال ٤

أى من الزوايا الموجهة الآتية في وضعها القياسي



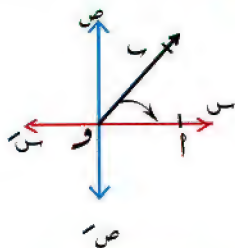
١

الحل

د أ ب الموجهة

ليست في الوضع القياسي

لأن رأسها لا تقع على نقطة الأصل



٢

الحل

د أ ب (و) الموجهة ليست في الوضع القياسي

لأن ضلعها الابتدائي لا ينطبق على

الجزء الموجب لمحور السينات



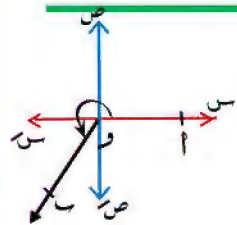


٢) تقع في الربع الثاني

إذا كان:

■ ضلعها النهائي \vec{OA} يقع بين \vec{OS} و $\vec{OS'}$

■ $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$

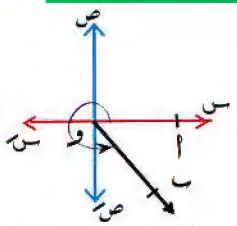


٣) تقع في الربع الثالث

إذا كان:

■ ضلعها النهائي \vec{OA} يقع بين \vec{OS} و $\vec{OS'}$

■ $180^\circ \leq \theta < 270^\circ$



٤) تقع في الربع الرابع

إذا كان:

■ ضلعها النهائي \vec{OA} يقع بين \vec{OS} و $\vec{OS'}$

■ $270^\circ \leq \theta < 360^\circ$

٥) إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات سميت زاوية ربعية

∴ الزوايا الموجهة: $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ هي زوايا ربعية

مثال ٥

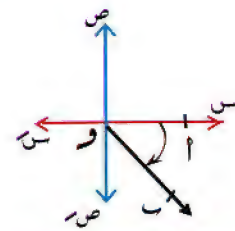
عين الربع الذي تقع فيه الزوايا الموجهة المرسومة في الوضع القياسي التي

قياساتها كالتالي

الحل

∴ $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$

∴ تقع في الربع الأول



الحل

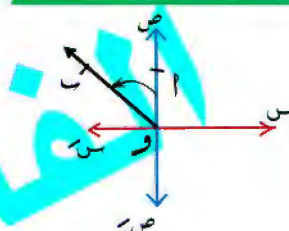
(أ و ب) الموجهة

في الوضع القياسي لأن:

- رأسها نقطة الأصل (و)

- ضلعها الابتدائي هو الجزء الموجب

لمحور السينات



الحل

(أ و ب) الموجهة

ليست في الوضع القياسي

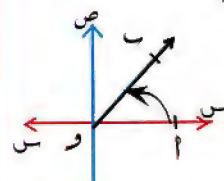
لأن ضلعها الابتدائي \vec{OA} لا ينطبق على

الجزء الموجب لمحور السينات

موقع الزاوية الموجهة

إذا كانت: (أ و ب) الموجهة في الوضع

القياسي وقياسها θ فإنها:



١) تقع في الربع الأول

إذا كان:

■ ضلعها النهائي \vec{OA} يقع بين \vec{OS} و $\vec{OS'}$

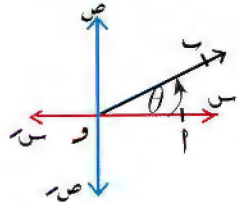
■ $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$



على الجزء السالب لمحور السينات
 $\therefore -180^\circ$ هي زاوية ربعية

الزوايا المتكافئة

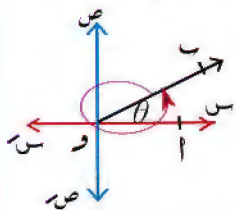
يقال لعدة زوايا في الوضع القياسي أنها متكافئة إذا كان الضلع النهائي لهم جميعا واحد



السكّل القابل

يمثل زاوية قياسها θ

عند دوران الضلع النهائي للزاوية وهو \leftarrow دورة كاملة حول نقطة الأصل فإنه يعود الى وضعه الأصلي



\therefore الزاويتان :

$$\theta, \quad 360 \times 1 + \theta$$

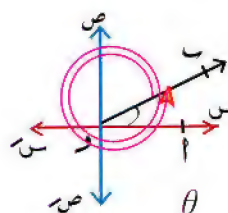
متكافئتان

وكذلك عند دوران الضلع النهائي

\leftarrow دورتين حول نقطة الأصل فإنه ينطبق على الضلع النهائي

للزاوية التي قياسها

\therefore الزاويتان :



$$\theta, \quad 360 \times 2 + \theta$$

متكافئتان

وهكذا

\therefore الزاويتان $\theta, \quad 360 \times n \pm \theta$

حيث $n \in \mathbb{Z}$

متكافئتان

٥٠ - ٢

الحل

$$\text{القياس الموجب للزاوية} = 360^\circ + 50^\circ = 410^\circ$$

$$410^\circ \equiv 50^\circ, 360^\circ, 720^\circ, \dots$$

\therefore الزاوية تقع في الربع الرابع

أو

ترسم من الجزء الموجب لمحور السينات في اتجاه دوران عقارب الساعة

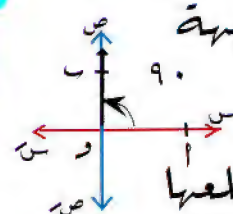


\therefore الزاوية تقع في الربع الرابع

٩٠ - ٣

الحل

\therefore عند رسم الزاوية الموجبة



التي قياسها 90°

في الوضع القياسي فإن ضلعها النهائي يقع على الجزء الموجب لمحور الصادات

\therefore الزاوية التي قياسها 90° هي زاوية ربعية

١٨٠ - ٤

الحل

الزاوية الموجبة التي قياسها -180° في

الوضع القياسي فإن ضلعها النهائي يقع

$$\text{القياس الموجب} = 50^\circ + 360^\circ = 410^\circ$$

$$\text{القياس السالب} = 360^\circ - 50^\circ = 310^\circ$$

$$\textcircled{2} \quad 120^\circ -$$

الحل

$$\text{القياس الموجب} = 120^\circ + 360^\circ = 480^\circ$$

$$\text{القياس السالب} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$$

$$\textcircled{3} \quad 3456^\circ$$

الحل

نوجد عدد الدورات الكاملة

$$3456 : 360 \approx 9,6$$

$$\therefore 9 = n$$

الزاوية الناتجة الموجبة قياسها

$$= 3456 - 360 \times 9 = 216^\circ$$

الزاوية الناتجة السالبة قياسها

$$= 360 - 3456 = -3096^\circ$$

$$= -144^\circ$$

$$\textcircled{4} \quad 3456^\circ -$$

الحل

عدد الدورات الكاملة

$$3456 : 360 \approx 9,6$$

$$\therefore 9 = n$$

الزاوية الناتجة الموجبة قياسها

اصغر قياس موجب و أكبر قياس سالب

■ لإيجاد أصغر قياس موجب مكافئ

للزاوية التي قياسها 1678°

نكتب الزاوية

$$1678^\circ = 360^\circ \times n + \theta$$

نوجد :

$$n = 1678 : 360$$

$$\approx 4,66111$$

حيث n عدد الدورات الكاملة

$$\therefore n = 4$$

$$\theta = \text{الزاوية العطا} - 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 1678^\circ - 360^\circ \times 4$$

$$= 238^\circ$$

■ لإيجاد أكبر قياس سالب مكافئ للزاوية

التي قياسها 1678°

أكبر قياس سالب

$$= 360^\circ \times (1 + n) - 1678^\circ$$

$$= 360^\circ \times 5 - 1678^\circ = 122^\circ$$

مثال ٦

أوجد زاويتين احدهما بقياس موجب

والأخرى بقياس سالب مكافئ للزاوية

الموجبة التي قياسها كالتالي :

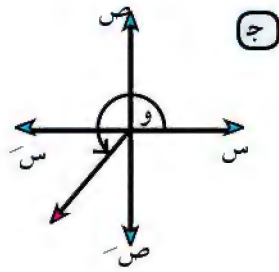
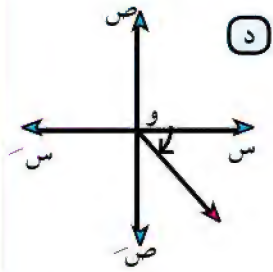
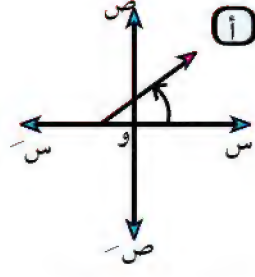
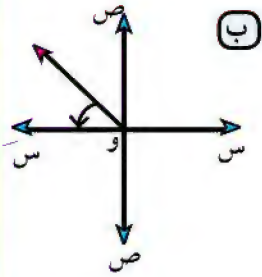
$$\textcircled{1} \quad 50^\circ$$

الحل



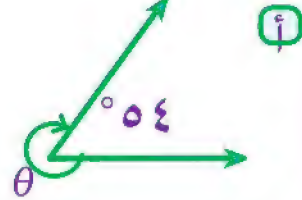
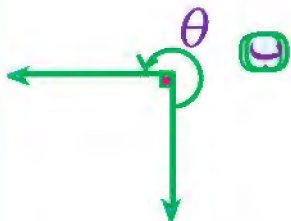
مثال ٨

أى من الزوايا الآتية تكون في الوضع القياسى



مثال ٩

أوجد قياس الزاوية (θ) في كل مما يأتي



$$-3456^\circ = -360^\circ \times 9 + 144^\circ$$

$$-3456^\circ = -360^\circ \times 10 + 144^\circ$$

مثال ٧

حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الموجبة الذى قياساتها كالتالى

$$-2196^\circ \quad (1)$$

الحل

$$\therefore -2196 \div 360 \approx -6,1$$

$$\therefore n = -6$$

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

$$-2196^\circ = -360^\circ \times 6 + 324^\circ$$

$$324^\circ \in [0^\circ, 360^\circ)$$

\therefore الزاوية تقع في الربع الرابع

$$-1615^\circ \quad (2)$$

الحل

$$\therefore -1615 \div 360 \approx -4,49$$

$$\therefore n = -4$$

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

$$-1615^\circ = -360^\circ \times 4 + 175^\circ$$

$$175^\circ \in [0^\circ, 360^\circ)$$



مثال ١١

حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الموجهة
التي قياساتها كالتالي

$$١) ٧٥٠^\circ$$

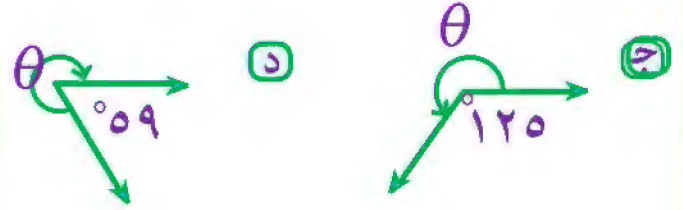
$$٢) -١٥٢٠^\circ$$

$$٣) -٢٧٠^\circ$$

مثال ١٢

عين أصغر قياس موجب للزوايا الموجهة
التي قياساتها كالتالي

$$١) -٣٠٠^\circ$$



مثال ١٠

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب
والأخرى بقياس سالب متكافئة للزاوية
الموجهة التي قياساتها كالتالي

$$١) ١٧٠^\circ$$

$$٢) -٣٩٥١^\circ$$

$$٣) ١٢٠٠^\circ$$

$$1237^\circ \textcircled{2}$$

$$590.8^\circ \textcircled{3}$$

مثال ١٣

عين أكبر قياس سالب للزوايا الموجهة
التي قياساتها كالتالى

$$2367^\circ \textcircled{1}$$

$$2567^\circ \textcircled{2}$$

$$4987^\circ \textcircled{3}$$



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① الزاوية التي قياسها 60° في الوضع القياسي تكافئ الزاوية التي قياسها
 (أ) 120° (ب) 240° (ج) 300° (د) 420°
- ② الزاوية التي قياسها 85° تكافئ في الوضع القياسي الزاوية التي قياسها
 (أ) 45° (ب) 135° (ج) 225° (د) 315°
- ③ الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها 167° هو
 (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ④ الزاوية التي قياسها (-135°) تقع في الربع
 (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ⑤ الزاوية التي قياسها (-85°) تقع في الربع
 (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ⑥ جميع الزوايا التي قياساتها كالاتي تقع في الربع الثاني ماعدا
 (أ) 240° (ب) 100° (ج) 120° (د) 86°
- ⑦ جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية 75° في الوضع القياسي ماعدا
 (أ) 285° (ب) 645° (ج) 285° (د) 435°

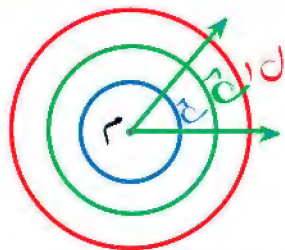
موقع



القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية الموجهة

الدرس الثاني

ثانياً : القياس الدائري للزاوية



في الشكل المقابل :

عند قسمة طول أي
قوس على نصف

القطر الناظر له في نفس الدائرة تنتج

(θ) القياس الدائري للزاوية

$$\frac{\frac{ل}{نق}}{\frac{ل}{نق}} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} = \theta$$

القياس الدائري

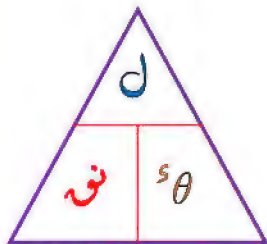
القياس الدائري للزاوية مركزية تحصر

بين ضلعيها قوساً طوله ل في دائرة

طول نصف قطرها يساوي نق

هو النسبة بين طول القوس إلى

طول نصف القطر



$$\frac{ل}{نق} = \theta$$

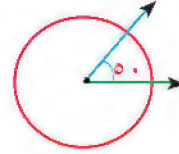
أولاً : القياس الستيني

تعتمد فكرة هذا القياس على تقسيم

الدائرة إلى 360 قوساً متساوية وكل

زاوية مركزية تقابل قوساً من هذه

الأقواس يكون قياسها 1°



الزاوية التي قياسها 50°

تقابل 50 قوساً من هذه الأقواس

وفي هذا القياس تقدر فيه الزاوية

بالدرجات والدقائق والثواني

وتنقسم الدرجة إلى 60 جزء وكل جزء

يسمى دقيقة :

$$1^\circ = 60'$$

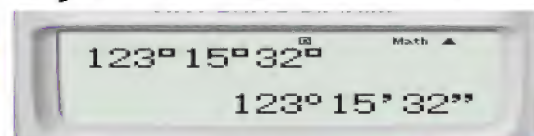
وتنقسم الدقيقة إلى 60 جزء كل جزء

كل جزء منها يسمى ثانية

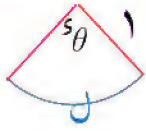
$$1' = 60''$$

$$123^\circ 15' 32''$$

ونقرأ 123 درجة و 15 دقيقة و 32 ثانية



مثال ١



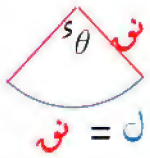
∴ في دائرة الوحدة يكون القياس

الدائري للزاوية المركزية =
طول القوس المحصور بين ضلعيها

الزاوية النصف قطرية (الراديان)

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر بين
ضلعيها قوساً طوله يساوي طول

نصف قطر الدائرة



$$l = \theta$$

$$\therefore \theta = \frac{l}{1} = l$$

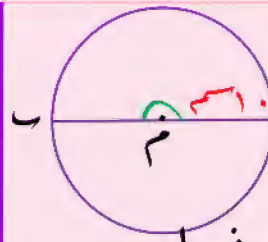
∴ قياس الزاوية النصف قطرية = 1

∴ الزاوية النصف قطرية هي وحدة
قياس القياس الدائري

مثال ٢

قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوس
في دائرة طوله يساوي ثلاثة أمثال

طول نصف قطر دائرتها =^s



في الشكل المقابل :

م دائرة طول نصف

قطرها ١٠ سم ، \overline{PM} قطر فيها
أوجد :

ن ($\angle M$) المركزية بالراديان

الحل

∴ طول القوس \overline{PM}

= نصف طول محيط الدائرة

طول القوس $\overline{PM} = \pi$

، $\theta = 10$ سم

$$\therefore l = \pi \cdot 10 = \pi$$

$$\therefore \frac{l}{\theta} = \frac{\pi}{10}$$

$$\pi = \frac{\pi \cdot 10}{10} = \theta$$

من المثال السابق نجد أن الزاوية

الزاوية المركزية التي قياسها 180°

قياسها الدائري هو π

ملحوظة

في دائرة الوحدة يكون طول نصف

قطرها وحدة الأطوال

أي : $\theta = 1$ ، $\therefore \theta = l = l$



مثال ٣

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2 \times \pi \times 10 = 20\pi \text{ سم}$$

مثال ٥

زاوية مركزية قياسها $1,5^\circ$ في دائرة
طول نصف قطرها ١٠ سم
أوجد طول قوسها

الحل

$$\therefore \text{نق} \times \theta^\circ = \text{ل} \\ \text{نق} = 10 \text{ سم} , \theta^\circ = 1,5^\circ \\ \therefore \text{ل} = 10 \times 1,5 = 15 \text{ سم}$$

مثال ٦

زاوية مركزية قياسها $1,2^\circ$ في دائرة
مساحتها 25π سم^٢
احسب
طول القوس المحصور بين ضلعيها

الحل

$$\therefore \theta^\circ = 1,2^\circ \\ \therefore \text{مساحة الدائرة} = \pi \text{ نق}^2 \\ \therefore 25\pi = \pi \text{ نق}^2 \\ \therefore 25 = \text{نق}^2 \therefore \text{نق} = 5 \text{ سم} \\ \therefore \text{ل} = \text{نق} \times \theta^\circ \therefore \text{ل} = 5 \times 1,2 = 6 \text{ سم}$$

زاوية مركزية في دائرة طول نصف

قطر دائرتها ١٥ سم وتحتصر بين
ضلعيها قوساً طوله ٢٥ سم
احسب قياسها الدائري

الحل

$$\therefore \text{ل} = 25 \text{ سم} , \text{نق} = 15 \text{ سم}$$

$$\therefore \theta^\circ = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

$$\therefore \theta^\circ = \frac{25}{15} = 1,667^\circ$$

مثال ٤

زاوية مركزية قياسها $1,2^\circ$ في دائرة
وتحتصر بين ضلعيها قوساً طوله ١٢ سم
احسب محيط دائرتها

الحل

$$\therefore \theta^\circ = 1,2^\circ , \text{ل} = 12 \text{ سم}$$

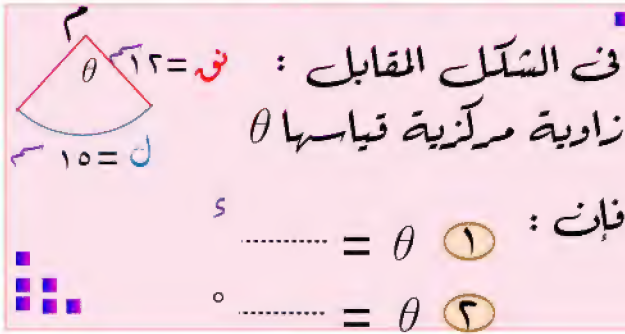
$$\therefore \text{نق} = \frac{\text{ل}}{\theta^\circ}$$

$$\therefore \text{نق} = \frac{12}{1,2} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 2\pi \text{ نق}$$



مثال ١



الحل

$$\therefore \text{نق} = 12 \text{ سم} , \text{ل} = 15 \text{ سم}$$

$$\frac{l}{r} = \theta^\circ$$

$$\therefore \frac{15}{12} = \theta^\circ$$

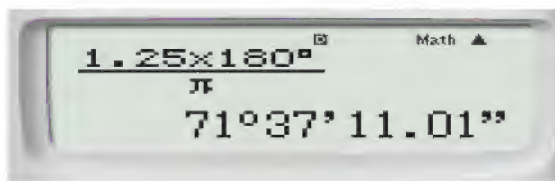
$$= 1.25^\circ$$

بالتحويل إلى القياس الستيني

$$\therefore \frac{1.25 \times 180}{\pi} = \theta^\circ$$

$$\therefore \frac{180 \times 1.25}{\pi} = \theta^\circ$$

$$= 71.37^\circ \approx 71^\circ$$



العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري

يرجع للزاوية وحدتي قياس هما

والقياس الستيني (س°)

القياس الدائري (θ°)

ويمكن التحويل بينهما



سبب أن تناولنا علاقة

$$\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$$

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية

$$\therefore \frac{l}{\pi r} = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \quad \text{بالتحويل } \times 2 \text{ للطريق}$$

$$\therefore \frac{l}{\pi r} = \frac{\theta^\circ}{180^\circ} \quad \text{نق}$$

$$\therefore \frac{\theta^\circ}{\pi} = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

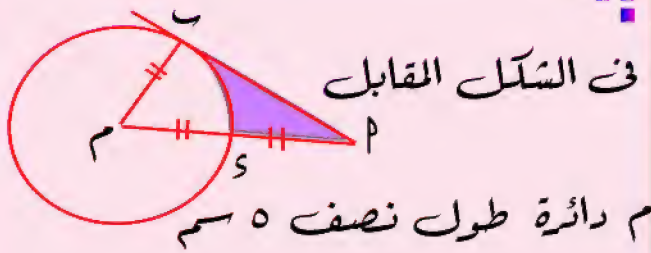
$$\frac{\text{القياس الستيني}}{180^\circ} = \frac{\text{القياس الدائري}}{\pi}$$

$$\therefore \text{القياس الستيني} = 180^\circ \times \frac{\text{القياس الدائري}}{\pi}$$

$$\text{القياس الدائري} = \frac{\pi \times \text{القياس الستيني}}{180^\circ}$$



مثال ٣



في الشكل المقابل
م دائرة طول نصف ٥ سم
رسم \overline{PM} مماس للدائرة عند ب
 \overline{PM} تقطع الدائرة في س بحيث $PS = PM$
احسب محيط الشكل الظلل

الحل

$$\because PM = PS = MS = 5 \text{ سم}$$

$$\because PM = 5$$

$\because \overline{PM}$ مماس للدائرة عند ب

$$\angle PMS = 90^\circ$$

$$\therefore \text{في المثلث } PMS, \frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \frac{PM}{PM} = \frac{PM}{PM}$$

$$\therefore \angle PMS = 60^\circ$$

$$\therefore \text{طول } \overline{PS} = 5 \times \theta$$

$$\therefore \text{طول } \overline{PS} = 5 \times \frac{60}{180}$$

$$= \frac{5}{3} \pi$$

مثال ٢

الشكل المقابل

يمثل زاوية مركزية
قياسها 120° في دائرة
طول نصف قطرها ٢٠ سم

احسب طول القوس المقابل لها

الحل

نوجد القياس الدائري للزاوية المركزية

$$\therefore \theta = \frac{\pi \times 120}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

نضغط على الفتح
فنحصل على النتيجة

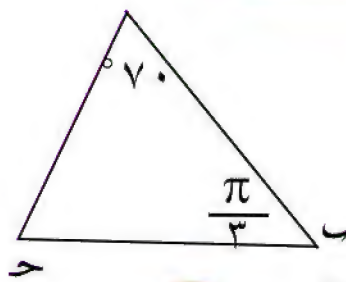
$$\theta \approx 2.094$$

$$\therefore \theta \times 20 = l$$

$$\therefore 20 \times 2.094 = l$$

$$\approx 41.88$$

الحل

في ΔABC ح

نفرض أن

$$70^\circ = (\angle A) \text{ و } \leftarrow (1)$$

$$\frac{\pi}{3} = (\angle B) \text{ و } ,$$

نوجد القياس الستيني للزاوية ب

$$60^\circ = \frac{180^\circ \cdot \frac{\pi}{3}}{\pi} = (\angle B) \text{ و } \leftarrow (2)$$

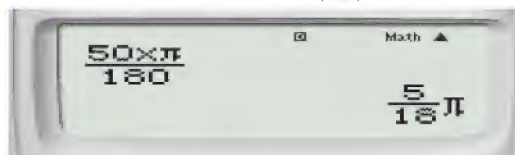
مجموع قياسات الزوايا الثلاث الداخلة

$$180^\circ =$$

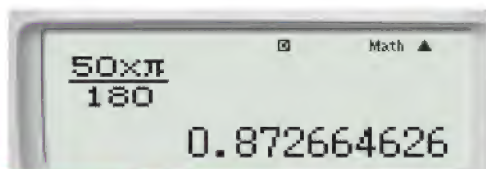
$$(\angle A + \angle B) - 180^\circ = (\angle C) \text{ و } \leftarrow$$

$$50^\circ =$$

$$\frac{\pi \times 50^\circ}{180^\circ} = (\angle C) \text{ و } \therefore \frac{\pi}{180} \times 50$$



$$\therefore 0.87 = (\angle C) \text{ و } \leftarrow$$


 $\therefore \Delta ABC$ قائم الزاوية في ب

من نظرية فيثاغورث

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c \therefore$$

$$\sqrt{5^2 + 10^2} =$$

$$\sqrt{25 + 100} =$$

$$\sqrt{125} = 11.18 =$$

 \therefore محيط الشكل الظل

$$a + b + c =$$

$$\frac{\pi}{3} + 5 + 11.18 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} + 1 + 11.18 \right) \text{ سم} \approx 18.89 \text{ سم}$$

مثال ٤

ثلاث قياسات أخرى زوايا 70° وقياسزاوية أخرى منه $\frac{\pi}{3}$

أوجد :

القياس الستيني والقياس الدائري

للزاوية الثالثة



مثال ٦

ملحوظة

ΔABC فيه :

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

أوجد القياس الستيني للزاوية $\angle C$

الحل

نفرض أن :

$$\angle A = x, \angle B = y, \angle C = z$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ - x$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ - x$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ - x$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

الزاوية التي قياسها 180° قياسها الدائري

يساوي π

∴ إذا كانت الزاوية الوجبة بدلالة π

لتحويلها إلى قياس ستيني مباشرة

بدون تطبيق القانون نحول π

إلى 180°

مثال ٥

أوجد القياس الستيني للزاوية الوجبة

التي قياساتها كالتالي

$$\frac{\pi}{3}$$

الحل

$$\frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{3} = \text{القياس الستيني}$$

$$60^\circ = \frac{180^\circ \times 1}{3} =$$

$$0.75$$

الحل

$$\frac{180^\circ \times 0.75}{\pi} = \text{القياس الستيني}$$

$$135^\circ = \frac{180^\circ \times 0.75}{\pi} =$$



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

- ١) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{9}$ تقع في الربع
- (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ٢) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{6}$ تقع في الربع
- (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ٣) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع
- (أ) الأول. (ب) الثاني. (ج) الثالث. (د) الرابع.
- ٤) إذا كان القياس الستيني لزاوية $١٢^\circ ٤٣'$ فإن قياسها الدائري =
- (أ) ٠.٢٤ (ب) ٠.٢٤π (ج) ٠.٢٨ (د) ٠.٢٨π
- ٥) الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{3}$ قياسها الستيني يساوى
- (أ) ٥٤٠° (ب) ٨٢٠° (ج) ١٥٠° (د) ٤٨٠°
- ٦) طول القوس في دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى
- (أ) π (ب) ٤π (ج) ٣π (د) ٢π
- ٧) القوس الذي طوله π سم في دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى
- (أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (ج) ٩٠° (د) ١٨٠°
- ٨) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى $\frac{\pi}{3}$ فإن القياس الدائري للزاوية الثالثة يساوى
- (أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{\pi}{١٢}$
- ٩) إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم يساوى $١٨٠ \times (٢ - n)$ حيث n عدد الأضلاع ، فإن قياس زاوية الشكل الخماسي المنتظم بالقياس الدائري يساوى
- (أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (ج) $\frac{\pi}{٥}$ (د) $\frac{\pi}{٦}$
- ١٠) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي بالتقدير الدائري يساوى
- (أ) π (ب) π (ج) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π
- ١١) في الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائري يساوى
- (أ) $\frac{1}{4}$ طول قوسها. (ب) $\frac{1}{٢}$ طول قوسها. (ج) طول قوسها. (د) ضعف طول قوسها.
- ١٢) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{3}{8}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التي تقابل هذا القوس قياسها الستيني
- (أ) ٣٠° (ب) $٦٧^\circ ٣٠'$ (ج) ١٣٥° (د) ٤٣° تقريباً.



٢ أوجد بدلالة π القياس الدائري لكل من الزوايا التي قياساتها كالتالى :

① 135° | ② 90° | ③ 300° | ④ 235°

⑤ 210° | ⑥ 112.4° | ⑦ 39° | ⑧ 78°

٣ أوجد القياس الدائري لكل من الزوايا التي قياساتها الستينية كالتالى مقرباً الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

① 58° | ② 56.6° | ③ 37.6°

④ 115.489° | ⑤ 257.54° | ⑥ 16.5048°

٤ أوجد القياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني) لكل من الزوايا التي قياساتها الدائرية كالتالى :

① $\pi \frac{11}{15}$ | ② $\pi 0.72$ | ③ 0.49

④ 1.67 | ⑤ 2.27 | ⑥ $3\frac{1}{4}$

الفاروق

٦ أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها (θ) وطول القوس المحصور (ل) فى كل من الحالات الآتية :

① $\theta = \frac{9}{\pi}$ ، $l = 22.5$ سم | ② $\theta = 0.767$ ، $l = 38.35$ سم

③ $\theta = 139^\circ$ ، $l = 24.325$ سم | ④ $\theta = 78.4646^\circ$ ، $l = 43.92$ سم



٧ أوجد لأقرب جزء من عشرة من السننيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :

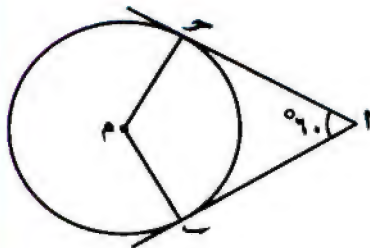
① نق = ١٢,٥ سم ، $\theta = ١,٦^\circ$	② نق = ٧,٥ سم ، $\theta = ٦٧^\circ$
③ نق = ٢٠ سم ، $\theta = ٢,٤٣^\circ$	④ نق = ١٥ سم ، $\theta = ١٠٤^\circ$

٨ أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°

٩ شكل رباعى قياس إحدى زواياه $\frac{١١}{٦}^\circ$ وقياس زاوية أخرى منه $\frac{٤}{٩}^\circ$ وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥° أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى لزاويته الرابعة. ($\frac{٢٢}{٧} = \pi$)



١٠ فى الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م ٢ ب القائم الزاوية فى م = ٣٢ سم^٢ فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

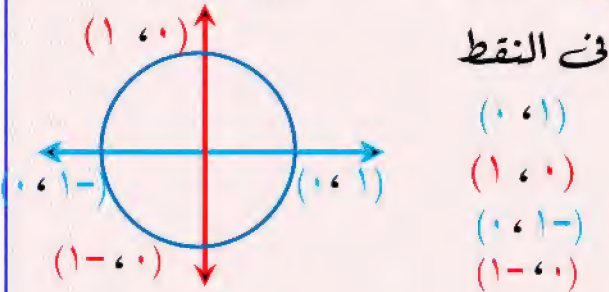


١١ فى الشكل المقابل : $\overline{أب}$ ، $\overline{أح}$ مماسان للدائرة م ، $\angle أ = ٦٠^\circ$ ، $\overline{أب} = ١٢$ سم. أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر $\widehat{أب}$

الدوال المثلثية

ملاحظات مهمة

١ دائرة الوحدة تقطع محاور الإحداثيات



في النقط

(0,1)

(1,0)

(0,-1)

(-1,0)

∴

فإن:

$$\sin \in [-1, 1]$$

$$\cos \in [-1, 1]$$

٢ لأي نقطة (س، ص) تقع على دائرة الوحدة فإنها تحقق معادلتها

$$1 = \sin^2 + \cos^2$$

مثال ١

إذا كانت النقطة (٣، ٤) ، $0 < \theta$

تقع على دائرة الوحدة أوجد: قيمة θ

الحل

∴ النقطة (٣، ٤) تقع على دائرة الوحدة

$$1 = \sin^2 + \cos^2$$

$$1 = (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2$$

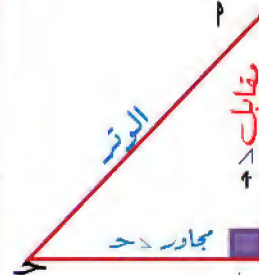
$$1 = 16 + 9$$

$$1 = 25 \therefore \frac{1}{25} = \cos^2 \theta$$

الدوال المثلثية للزاوية الحادة

تذكر أن:

إذا كان: Δ θ قائم الزاوية في Δ فإن كلًا من θ ، θ حادتين



فإن الدوال المثلثية للزاوية θ هي

$$\sin \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

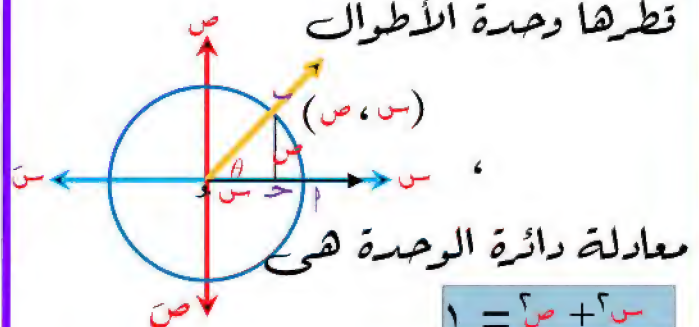
$$\cos \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد وطول نصف

قطرها وحدة الأطوال



$$1 = \sin^2 + \cos^2$$

$$\sqrt{\frac{144}{169}} \pm = \text{ص} \therefore \sqrt{\frac{144}{169}} = \text{ص} \therefore \frac{12}{13} = \text{ص}$$

$$\therefore \frac{12}{13} \pm = \text{ص} \therefore \frac{12}{13} < 0$$

$$\therefore \frac{12}{13} = \text{ص}$$

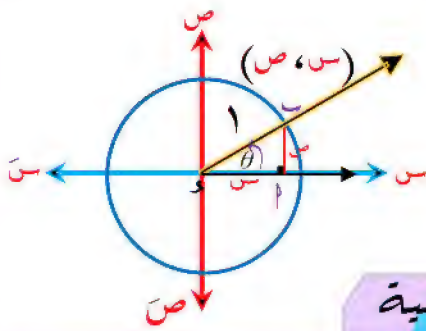
$$\sqrt{\frac{1}{5}} \pm = \text{پ} \therefore \sqrt{\frac{1}{5}} = \text{پ} \therefore \frac{1}{\sqrt{5}} = \text{پ}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}} = \text{پ} \therefore 0 < \text{پ}$$

مثال ٢

الدوال المثلثية

إذا كان θ هو قياس زاوية موجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\text{ص}, \text{س})$ فإن :



الدوال المثلثية

$$\cos \theta = \frac{\text{س}}{1} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{صتا } \theta \quad (1)$$

$$\therefore \text{صتا } \theta = \text{الإحداثي السيني لنقطة ب}$$

$$\sin \theta = \frac{\text{ص}}{1} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{حما } \theta \quad (2)$$

$$\therefore \text{حما } \theta = \text{الإحداثي الصادي لنقطة ب}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \text{طتا } \theta \quad (3)$$

$$\therefore \text{طتا } \theta = \frac{\text{الإحداثي الصادي للنقطة ب}}{\text{الإحداثي السيني للنقطة ب}}$$

إذا كان θ هو قياس زاوية موجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{5}{13}, \text{ص})$ حيث :

$$180^\circ > \theta > 90^\circ$$

أوجد قيمة : ص

الحل



$$180^\circ > \theta > 90^\circ$$

\therefore تقع في الربع الثاني

$$\therefore \text{ص} < 0$$

\therefore النقطة $(\frac{5}{13}, \text{ص})$ تقع على دائرة الوحدة

$$\therefore 1 = (\frac{5}{13})^2 + (\text{ص})^2$$

$$\therefore 1 = \frac{25}{169} + \text{ص}^2$$

$$\therefore \text{ص}^2 = 1 - \frac{25}{169}$$



$$\therefore 1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$\therefore 1 = \cos^2 \theta + (-0.6)^2$$

$$\therefore 1 = \cos^2 \theta + 0.36$$

$$\therefore \cos^2 \theta = 1 - 0.36$$

$$\therefore \cos^2 \theta = 0.64 \quad \therefore \cos \theta = \pm 0.8$$

$$\therefore \cos \theta = \pm 0.8 \quad \therefore \cos \theta > 0$$

$$\therefore \cos \theta = 0.8$$

\therefore نقطة تقاطع الضلع النهائي مع دائري الوحدة هي $(0.8, -0.6)$ فيكون

$$1 \text{ حتا } \theta = \cos \theta = -0.6$$

$$2 \text{ حا } \theta = \sin \theta = -0.8$$

$$3 \text{ طا } \theta = \tan \theta = \frac{-0.8}{-0.6} = \frac{4}{3}$$

مقلوبات الدوال المثلثية

مقلوبات الدوال المثلثية

$\sec \theta$

$$1 \text{ قاطع الزاوية } \theta = \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$2 \text{ قاطع تمام الزاوية } \theta = \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$3 \text{ ظل تمام الزاوية } \theta = \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

فمثلاً:

إذا كانت: θ قياس زاوية موجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ فإن:

$$1 \text{ حتا } \theta = \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$2 \text{ حا } \theta = \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$3 \text{ طا } \theta = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{4}{3}$$

مثال ٣

إذا كانت: θ هو قياس زاوية موجبة في الوضع القياسي يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة $(-0.6, -0.8)$ حيث: $\theta \in [180^\circ, 270^\circ]$ فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية التي قياسها θ

الحل

$$\therefore 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

تقع في الربع الثالث

$$\therefore \cos \theta < 0$$

\therefore النقطة $(-0.6, -0.8)$ تقع على

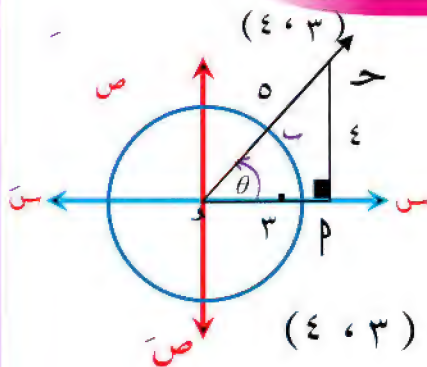
دائرة الوحدة



مثال ٥

إذا كانت: قياس زاوية مرجبة في الوضع القياسي والنقطة $(4, 3)$ تقع على ضلعها النهائي أوجد نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة ثم أوجد جميع الدوال المثلثية ومقلوباتها للزاوية θ

الحل



∴ النقطة $ح(4, 3)$
تقع على الضلع النهائي للزاوية
∴ $ر = 4$ وحدات طول
 $ص = 3$ وحدات طول
∴ $ر = 5$ وحدات طول
∴ $ح = 4$ ، $ص = 3$ ، $ر = 5$
∴ $ح = 4$ ، $ص = 3$ ، $ر = 5$

نقطة $ب(4/5, 3/5)$ هي نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة

$$١ \quad ح = 4/5 = \cos \theta ، \quad ص = 3/5 = \sin \theta$$

$$٢ \quad ح = 4/5 = \cos \theta ، \quad ص = 3/5 = \sin \theta$$

$$٣ \quad ح = 4/5 = \cos \theta ، \quad ص = 3/5 = \sin \theta$$

مثال ٤

إذا كانت: θ قياس زاوية مرجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $ب(12/13, 5/13)$
فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية θ ومقلوباتها

الحل

$$١ \quad ح = 12/13 = \cos \theta$$

$$٢ \quad ح = 12/13 = \cos \theta$$

$$٣ \quad ح = 12/13 = \cos \theta$$

$$٤ \quad ح = 12/13 = \cos \theta$$

$$٥ \quad ح = 12/13 = \cos \theta$$

$$٦ \quad ح = 12/13 = \cos \theta$$

$$\therefore 1 = {}^2P_0$$

$$\therefore \frac{1}{0} = {}^2P_1$$

$$\therefore \frac{1}{0} = {}^2P_1 = 1 < 2$$

$$\therefore \text{النقطة هي } \left(\frac{1}{0}, \frac{2}{0} \right)$$

$$\textcircled{1} \text{ حتا } \theta = \text{س} = \frac{2}{0}$$

ومقلوبها

$$\text{قا } \theta = \frac{1}{\text{س}} = \frac{1}{\frac{2}{0}} = \frac{0}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ حا } \theta = \text{ص} = \frac{1}{0}$$

ومقلوبها

$$\text{قتا } \theta = \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{\frac{1}{0}} = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ طا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{1}{\frac{2}{0}} = \frac{0}{2}$$

ومقلوبها

$$\text{طنا } \theta = \frac{1}{\text{طا}} = \frac{1}{\frac{0}{2}} = 2 = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$$

$$\therefore \text{حتا } \theta = \frac{3}{0}, \text{ حا } \theta = \frac{4}{0}$$

نقطة ب $\left(\frac{3}{0}, \frac{4}{0} \right)$ هي نقطة تقاطع ضلعها النهائي مع دائرة الوحدة

$$\textcircled{1} \text{ حتا } \theta = \text{س} = \frac{3}{0}, \text{ قا } \theta = \frac{0}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ حا } \theta = \text{ص} = \frac{4}{0}, \text{ قتا } \theta = \frac{0}{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ طا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{4}{3}, \text{ طتا } \theta = \frac{3}{4}$$

مثال ٦

إذا لآت الضلع النهائي لزاوية موجبة في الوضع القياسي قياسها θ يقطع دائرة الوحدة في النقطة (P, P_2) ، $0 < P$ ، أوجد قيمة P

أوجد قيمة المقدار :

$$1 + \text{طا}^{\theta} - \text{قا}^{\theta}$$

الحل

∴ النقطة ب (P, P_2) تقع على دائرة الوحدة

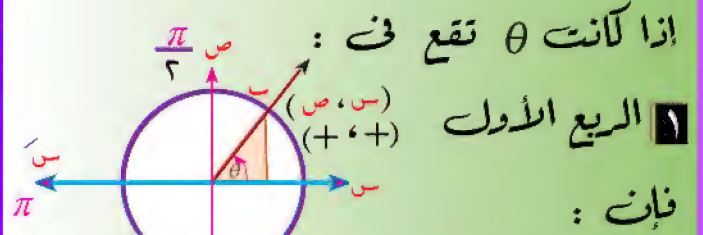
$$\therefore \text{س}^2 + \text{ص}^2 = 1$$

$$\therefore 1 = (P)^2 + (P_2)^2$$

$$\therefore 1 = P^2 + P_2^2$$

إشارات الدوال المثلثية

إذا كانت θ قياس زاوية موجهة في
الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع
دائرة الوحدة في النقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$



إذا كانت θ تقع في :
الربع الأول $(+, +)$
فإن :
 $\cos \theta > 0, \sin \theta > 0$
الضلع النهائي يقع بين \vec{u} و \vec{v}
 $\theta \in [0, 90[$ ، $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

كل النسب المثلثية للزاوية θ اشارةها
موجبة

مثال ٧

عين إشارة كل من :

- ١) 50° ٢) 70°

الحل

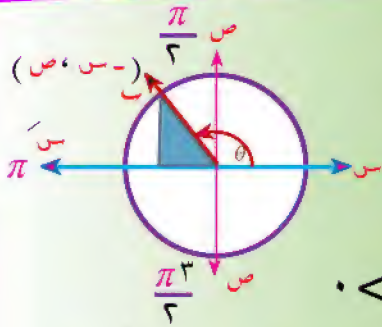
١) 50° تقع في الربع الأول

∴ إشارة 50° موجبة

٢) 70° تقع في الربع الأول

∴ إشارة 70° موجبة

الربع الثاني



$\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$
الضلع النهائي يقع بين \vec{v} و \vec{u}

$\theta \in [90, 180[$ ، $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

إشارة كل من : $\cos \theta$ ، $\sin \theta$
موجبتان

وباقى النسب المثلثية للزاوية θ
تكون سالبة

مثال ٨

عين إشارة كل من :

١) 120°

الحل

∴ 120° تقع في الربع الثاني

∴ إشارة 120° سالبة

٢) 170°

الحل

∴ 170° تقع في الربع الثاني

∴ إشارة 170° موجبة

الفترة التي يقع فيها قياس الزاوية	إشارات الدوال التثلثية	الزاوية
جاء، قتا، جتا، قا، ظا، ظنا		
$0, \frac{\pi}{2}$	+	الأول
$\frac{\pi}{2}, \pi$	-	الثاني
$\pi, \frac{3\pi}{2}$	+	الثالث
$\frac{3\pi}{2}, 2\pi$	-	الرابع

مثال ٩

عين إشارة النسب التثلثية الآتية:

١) 47.0° ٢) (-30.0°)

٣) $\frac{\pi}{3}$ ٤) 385.0°

الحل

١) \therefore الزاوية 47.0° تكافئ الزاوية

$$47.0^\circ = 360^\circ - 313.0^\circ$$

\therefore 47.0° تقع في الربع الثاني

\therefore إشارة 47.0° موجبة

٢) \therefore الزاوية 47.0° تكافئ الزاوية

$$(-30.0^\circ) \text{ تكافئ زاوية}$$

$$330^\circ = 360^\circ + 30^\circ$$

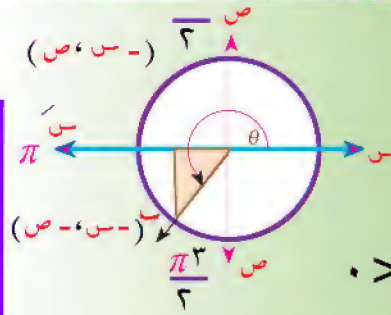
\therefore الزاوية 30° تقع في الربع الرابع

\therefore (-30.0°) موجبة

٣) القياس الستيني للزاوية $\frac{\pi}{3}$

$$30.0^\circ = \frac{180 \times \pi}{3}$$

٣ الربع الثالث



الضلع النهائي يقع بين π و $\frac{3\pi}{2}$

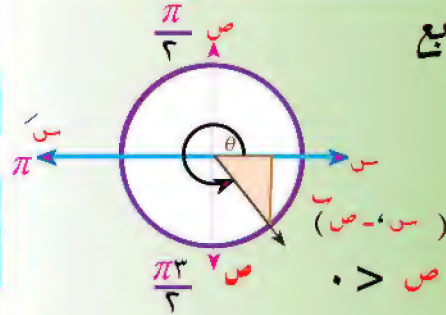
$$270^\circ, 180^\circ \ni \theta, \text{ أ } \frac{\pi}{2}, \pi \ni \theta$$

إشارة كل من:

$\sin \theta$ ، $\cos \theta$ موجبتان

وباقى النسب التثلثية للزاوية θ تكون سالبة

٤ الربع الرابع



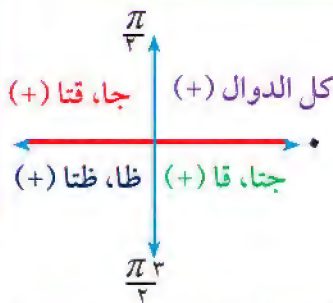
الضلع النهائي يقع بين $\frac{3\pi}{2}$ و 2π

$$270^\circ, 180^\circ \ni \theta, \text{ أ } \frac{\pi}{2}, \pi \ni \theta$$

إشارة كل من:

$\sin \theta$ ، $\cos \theta$ موجبتان

وباقى النسب التثلثية للزاوية θ تكون سالبة



$$\therefore \text{ص}^2 = 0,64 \quad \therefore \text{ص} = \pm 0,8$$

$$\therefore \text{ص} = \pm 0,8 \quad \therefore \text{ص} < 0$$

$$\text{ص} = 0,8$$

$$\therefore \text{ب} (0,8, 0,6)$$

$$\therefore \text{ط} = \theta = \frac{\text{ص}}{\text{ص}} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{قتا} = \theta = \frac{1}{\text{ص}} = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \text{القرار} = \text{قتا}^2 - \text{ط}^2$$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{25}{16} - \frac{9}{16} =$$

$$= \frac{16}{16} =$$

$$1$$

مثال ١١

$$\text{إذا كانت } 180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$$

$$\text{، ولأن ظا } \theta = \frac{7}{24} \text{ أوجد قيمة جميع}$$

النسب التثلثية للزاوية

الحل

$$\therefore 180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$$

$$\therefore \theta \text{ تقع في الربع الثالث}$$

$$\therefore \text{ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة}$$

في (-ص، -ص)

$$\therefore \text{الزاوية تقع في الربع الرابع}$$

$$\therefore \text{قتا} = \frac{\pi}{3} \text{ سالبة}$$

$$\text{٤) ط} = 3850^\circ$$

$$\therefore \text{الزاوية } 3850^\circ \text{ تكافئ الزاوية}$$

$$3850^\circ = 360^\circ \times 10 - 3850^\circ$$

$$\therefore \text{الزاوية } 3850^\circ \text{ تقع في الربع الثالث}$$

مثال ١٠

$$\text{إذا كانت } \theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \text{، حتا } \theta = 0,6 \text{، فأوجد قيمة القرار: قتا}^2 - \text{ط}^2$$

الحل

$$\therefore \text{حتا } \theta = 0,6$$

نفرض أن الضلع النهائي للزاوية θ يقطع دائرة الوحدة في النقطة

$$(0,6, \text{ص}) \text{ تقع في الربع الأول}$$

$$\therefore \text{ص} < 0$$

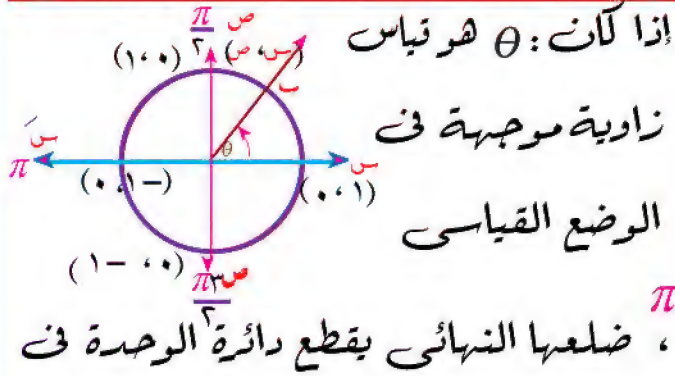
$$\therefore \text{ص}^2 + \text{قتا}^2 = 1$$

$$\therefore 1 = (\text{ص})^2 + (0,6)^2$$

$$\therefore 1 = \text{ص}^2 + 0,36$$

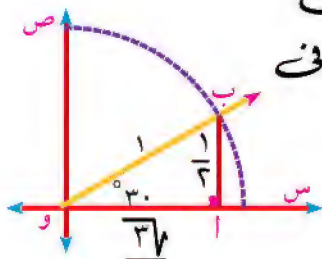
$$\therefore \text{ص}^2 = 1 - 0,36$$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة



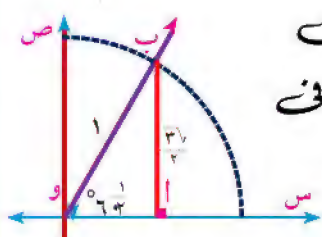
قيم الدوال المثلثية	الزاوية	النقطة على دائرة الوحدة	الزاوية
θ ط	θ ح	θ ص	
0	1	0	0°
غير معرف	0	1	90°
0	-1	0	180°
غير معرف	0	-1	270°

(2) إذا كانت $\theta = 30^\circ$ فإن ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$



حنا $\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$ ، حنا $\frac{1}{2} = 30^\circ$ ، ط $\frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$

(3) إذا كانت $\theta = 60^\circ$ فإن ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$



حنا $\frac{1}{2} = 60^\circ$ ، حنا $\frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ$ ، ط $\frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ$

$$\therefore \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \theta = 1, \cos \theta = \sqrt{3} \Rightarrow 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$\therefore 1 = (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2$$

$$1 = \sin^2 49^\circ + \cos^2 49^\circ$$

$$\therefore 1 = \sin^2 63.5^\circ + \cos^2 63.5^\circ$$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 63.5^\circ} = \frac{1}{\cos^2 63.5^\circ}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 63.5^\circ} = \frac{1}{\cos^2 63.5^\circ}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin^2 63.5^\circ} = \frac{1}{\cos^2 63.5^\circ}$$

النقطة هي

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\textcircled{1} \text{ حنا } \theta = \sin = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ومقلوبها

$$\text{فا } \theta = \frac{1}{\sin} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ حنا } \theta = \sin = \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ومقلوبها

$$\text{فتا } \theta = \frac{1}{\sin} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ ط } \theta = \frac{\sin}{\cos} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ومقلوبها

$$\text{طتا } \theta = \frac{1}{\frac{\sin}{\cos}} = \frac{\cos}{\sin} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

مثال ١٣

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة
لكل مما يأتي:

$$(١) \text{ جا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٩٠^\circ - \text{ جتا } ٤٥^\circ$$

الحل

∴ القرار

$$\begin{aligned} &= \text{ جا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٩٠^\circ - \text{ جتا } ٤٥^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$(٢) \text{ جتا } ٣٠^\circ \text{ ظا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٤٥^\circ - \text{ جتا } ١٨٠^\circ$$

الحل

∴ القرار

$$\begin{aligned} &\text{ جتا } ٣٠^\circ \text{ ظا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٤٥^\circ - \text{ جتا } ١٨٠^\circ \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} - (-1) \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \\ &= 1 + \frac{4}{4} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$(٣) \text{ ظا } ٦٠^\circ - \text{ قا } ٦٠^\circ + \text{ جا } ٩٠^\circ + \text{ جا } ٤٥^\circ \text{ جتا } ٤٥^\circ$$

الحل

القرار

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 + 1 + (-2) - \frac{3}{4} =$$

$$(٢) \text{ إذا كانت } \theta = ٤٥^\circ \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

فإن ضلعها النهائي
يقطع دائرة الوحدة في

النقطة $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$



$$\text{جتا } ٤٥^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ جا } ٤٥^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ طا } ٤٥^\circ = 1$$

مثال ١٢

أثبت صحة التطابقة الآتية :

$$\frac{\pi^2}{4} \text{ جا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ - \text{ جتا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٦٠^\circ = \frac{\pi^2}{4}$$

الحل

الطرف الأيمن

$$\begin{aligned} &= \text{ جا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ - \text{ جتا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٦٠^\circ \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

← ١

∴ الطرف الأيسر = $\frac{\pi^2}{4} \text{ جا } ٦٠^\circ$

$$= \text{ جا } ٤٥^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \leftarrow ٢$$

من ١، ٢ ينتج أن الطرفين متساويان

$$\text{ جا } ٦٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ - \text{ جتا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٦٠^\circ = \frac{\pi^2}{4} \text{ جا } ٦٠^\circ$$



$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \therefore \text{البسط} = \text{القام}$$

$$= 1 = \text{الأيسر}$$

مثال ١٥

بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة س إذا كان :

$$\textcircled{1} \text{ س} = \text{جتا } 3^\circ \cdot \text{ظا } 3^\circ \cdot \text{ظا } 5^\circ$$

الحل

$$\text{س} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times (1)$$

$$\therefore \text{س} = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ س} = 3^\circ \cdot \text{جتا } 6^\circ \cdot 4^\circ \cdot \text{جتا } 3^\circ + \frac{1}{2} \cdot \text{ظا } 5^\circ$$

الحل

$$\therefore \text{س} = 3^\circ \cdot \text{جتا } 6^\circ \cdot 4^\circ \cdot \text{جتا } 3^\circ + \frac{1}{2} \cdot \text{ظا } 5^\circ$$

$$\text{س} = \frac{1}{2} \times 3 + \left(\frac{1}{2}\right) \times 4 - \frac{1}{2} \times (1)$$

$$\therefore \text{س} = \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{س} = 1$$

$$\therefore \text{س} = 1 \pm$$

$$= 3 - 4 + 1 + 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2 + 2 - 2 = 2$$

مثال ١٤

أثبت صحة التطابقات التالية

$$\textcircled{1} \text{ (ج) جتا } 3^\circ \cdot \text{جتا } 6^\circ + \text{جتا } 3^\circ \cdot \text{جتا } 6^\circ = \text{جتا } 9^\circ$$

الحل

$$\text{الأيمن} = \text{جتا } 3^\circ \cdot \text{جتا } 6^\circ + \text{جتا } 3^\circ \cdot \text{جتا } 6^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$= 1 \leftarrow \textcircled{1}$$

$$\text{الأيسر} = \text{جتا } 9^\circ = 1 \leftarrow \textcircled{2}$$

من ١، ٢ ينتج أن الطرفين متساويان

$$\text{جتا } 3^\circ \cdot \text{جتا } 5^\circ - \text{جتا } 5^\circ \cdot \text{جتا } 3^\circ = \text{جتا } 3^\circ \cdot \text{جتا } 5^\circ - \text{جتا } 3^\circ \cdot \text{جتا } 5^\circ$$

$$\textcircled{3} = 1$$

الحل

$$\text{الأيمن} = \text{جتا } 3^\circ \cdot \text{جتا } 5^\circ - \text{جتا } 5^\circ \cdot \text{جتا } 3^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تمارين

١ أكمل العبارات الآتية :

- ١ طتا $60^\circ = \dots$ ٢ جتا $180^\circ = \dots$
 ٣ قتا $90^\circ = \dots$ ٤ طا $30^\circ = \dots$
 ٥ جا $30^\circ \times$ جتا $30^\circ = \dots$ ٦ طتا $30^\circ +$ جا $45^\circ = \dots$
 ٧ طا $90^\circ = \dots$ ٨ جتا $270^\circ = \dots$
 ٩ إذا كان : س جا $30^\circ +$ جتا $180^\circ =$ فإن : س =
 ١٠ إذا كان : س $2 =$ جتا 45° جا 45° فإن : س =

٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتي :

- ١ ٤ جا 30° ظا $45^\circ + 2$ قا $45^\circ -$ ظا 60°
 ٢ ٢ جا $30^\circ + 8$ جتا $60^\circ -$ ظا 45° جتا 180°
 ٣ قا $60^\circ - 4$ جا $45^\circ +$ جا 270°
 ٤ جتا 90° قتا $30^\circ +$ قا 45° جا $30^\circ -$ جتا 270° جا 180°
 ٥ جا 90° جتا $30^\circ -$ جتا 90° جا 30°
 ٦ جتا 90° قتا $30^\circ +$ قا 45° جا $30^\circ -$ جتا 270° جا 180°

٣ اثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :

- ١ جتا 30° جتا $60^\circ -$ جا 30° جا $60^\circ =$ جتا 90°
 ٢ ٢ جا 30° جتا $30^\circ =$ جا 60°
 ٣ جتا $90^\circ =$ جتا $45^\circ -$ جا 45°
 ٤ جا $90^\circ = 2$ جا 45° جتا $45^\circ + 3$ جتا 270°
 ٥ قتا 60° ظتا 30° ظا $60^\circ = 2$ قا 45° جتا 30°
 ٦ جتا $60^\circ = 2$ جتا $30^\circ - 1$

٤ أوجد قيمة س إذا كان :

- ١ س جا $\frac{\pi}{4}$ جتا $\pi =$ ظا $\frac{\pi}{3}$ جا $\frac{\pi}{2}$ ٢ س جا $\frac{\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ ظتا $\frac{\pi}{6} =$ ظا $\frac{\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{3} -$ جتا $\frac{\pi}{2}$



مثال ۱

① ۱ ② ۵ ③ ۱- ④ ۲ ⑤ صفر

۶ مثال

$$= \dots - (\theta - 1 \wedge \cdot) \quad \textcircled{3}$$

۱- (م، ص)

السینی

فیکٹوں

① صتا θ = - صتا $(\theta - ۱۸۰^\circ)$

$$\textcircled{5} \text{ حتما} + \theta \text{ حتما} = (\theta - 180) \text{ حتما} = \text{صفر}$$

③ إذا كان: $p + q = 180$

$$\text{صفا} = ۲ + \text{صفا} = \text{صفر}$$

حبیب بن عبد صہیب

١ الزاويتان المنتسبتان θ ، $\theta = 180^\circ$

(س ص) (ص - س، ص)

إذا كانت الزاوية النجس

قیاساً تعین علی

دائرة الوحدة النقطة (س، ص)

فإن الزاوية التي قياسها $180^\circ - \theta$ تعين

على دائرة الوحدة النقطة $(-s, v)$

وبالاعتناء أن الزاويتان لهما نفس

الإحصائي الصادي فيكون :

جا $\theta = \theta$ ، جا $(\theta - 180^\circ) = \theta$

$$\text{ج} \circ \theta = \text{ج} \circ (\theta^{-1} \circ \theta) = (\text{ج} \circ \theta^{-1}) \circ \theta = \theta \circ \theta = \theta$$

زاوية = \angle مكملة هذه الزاوية

إذا كان السُّلْبُ h و h ربعي دائري

فایہ : $۱۸۰ = ح + ۲$

ما = ما ح ، قنا = قنا ح

مثال ٣

إذا كان الشكل $\triangle ABC$ و $\angle A = 90^\circ$ و $\angle B = 30^\circ$ و $\angle C = 60^\circ$ فإذن :

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{منا}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{منا}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{منا}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\text{منا}}{\text{جنا}} = \sqrt{3}$$

مثال ٤

إذا كان الشكل $\triangle ABC$ و $\angle A = 90^\circ$ و $\angle B = 45^\circ$ و $\angle C = 45^\circ$ فإذن :

$$\sin 45^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{منا}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال ٥

في $\triangle ABC$ و $\angle A = 90^\circ$ و $\angle B = 60^\circ$ و $\angle C = 30^\circ$ فإذن :

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{منا}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{منا}} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\text{جنا}}{\text{منا}} = \sqrt{3}$$

مثال ٦

أكمل ما يأتي :

$$\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$$

$$\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ$$

الزاويتان θ و $180^\circ - \theta$ تعينان على دائرة الوحدة النقطتان $P(\cos \theta, \sin \theta)$ و $Q(\cos(180^\circ - \theta), \sin(180^\circ - \theta))$

الزاويتان تختلفان في إشارة الإحداثي السيني

$$\therefore \sin \theta = \sin(180^\circ - \theta) , \cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta)$$

$$\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$$

$$\sin \theta + \sin(180^\circ - \theta) = 2 \sin \theta$$

$$\sin 180^\circ = 0 = 2 \sin \theta - \sin \theta$$

$$\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$$

$$\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta)$$

مثال ٧

$$\sin 0^\circ = 0 = \sin 180^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \sin 150^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ$$

$$\sin 90^\circ = 1 = \sin 90^\circ$$

الدوال التلتية للزاويتان: θ و $180^\circ - \theta$

$$\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$$

$$\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta)$$

$$\tan \theta = -\tan(180^\circ - \theta)$$

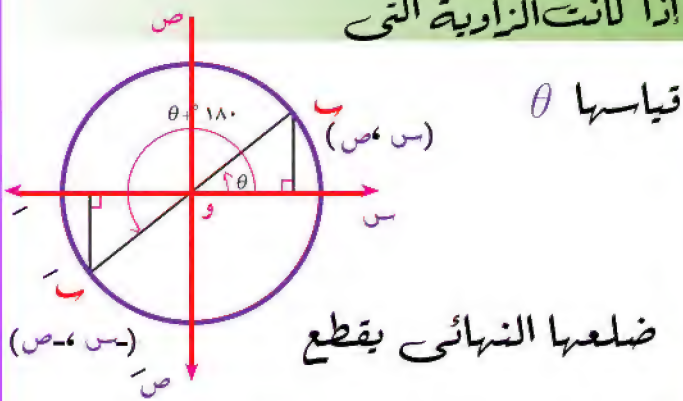
$$\cot \theta = -\cot(180^\circ - \theta)$$

$$\sec \theta = -\sec(180^\circ - \theta)$$

$$\csc \theta = \csc(180^\circ - \theta)$$

٢ الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta + 180^\circ$

إذا كانت الزاوية التي

قياسها θ

ضلعها النهائي يقطع

دائرة الوحدة النقطة $(\cos(\theta + 180^\circ), \sin(\theta + 180^\circ))$ فإن الزاوية التي قياسها $(\theta + 180^\circ)$

ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في

 $(-\cos \theta, -\sin \theta)$

ونلاحظ:

$$\textcircled{1} \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta, \sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$$

$$\therefore \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$$

$$\textcircled{2} \cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta, \sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$$

$$\therefore \sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$$

$$\textcircled{3} \tan(\theta + 180^\circ) = \frac{\sin(\theta + 180^\circ)}{\cos(\theta + 180^\circ)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\therefore \tan(\theta + 180^\circ) = \tan \theta$$

الخلاصة

إيجاد نسبة مثلثية للزاوية

للزاوية $(\theta + 180^\circ)$

$$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos \theta$$

الربع الثالث

النسبة التثلثية للزاوية

إشارة النسبة التثلثية في هذا الربع

مثال ٨

بدون استخدام الحاسبة أو مبرقيمة

جنا 120° متكاملتان

$$60^\circ, 120^\circ$$

$$\therefore \text{جنا } 120^\circ = 60^\circ$$

$$\text{جنا } 120^\circ = \frac{1}{2}$$

حل آخر

 120° تقع في الربع الثاني

$$\therefore 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$$

$$\therefore \text{جنا } 120^\circ = \text{جنا } (180^\circ - 60^\circ)$$

$$\therefore \text{جنا } 120^\circ = 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}$$

مثال ٩

إذا كانت θ زاوية موجبة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

فأكمل ما يأتي

$$\textcircled{1} \cos(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{2} \sin(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{3} \tan(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{4} \cot(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{5} \csc(\theta - 180^\circ) = \dots$$

$$\textcircled{6} \sec(\theta - 180^\circ) = \dots$$

مثال ١٠

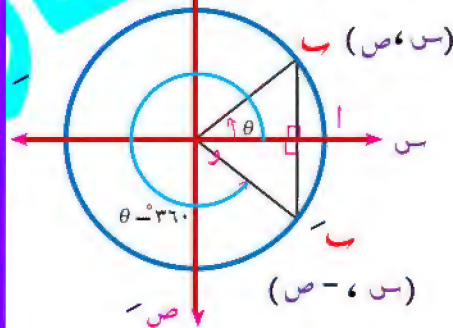
إذا كانت θ زاوية موجهة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$

فأكمل ما يأتي

- ١ جتا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٢ جا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٣ ظا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٤ قتا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٥ قا $(\theta + 180^\circ) =$
- ٦ ظنا $(\theta + 180^\circ) =$

٣ الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta - 360^\circ$

إذا كانت الزاوية التي قياسها θ



ضلعها النهائي يقطع

دائرة الوحدة النقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$

فإن الزاوية التي قياسها $(\theta - 360^\circ)$

ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في

النقطة $(\cos(\theta - 360^\circ), \sin(\theta - 360^\circ))$

ونلاحظ أن :

$$\textcircled{1} \sin \theta = \sin(\theta - 360^\circ), \cos \theta = \cos(\theta - 360^\circ)$$

$$\therefore \sin(\theta - 360^\circ) = \sin \theta$$

$$\textcircled{2} \sin \theta = \sin(\theta - 360^\circ), \cos \theta = \cos(\theta - 360^\circ)$$

$$\therefore \sin(\theta - 360^\circ) = \sin \theta$$

$$\textcircled{3} \sin \theta = \sin(\theta + 180^\circ), \cos \theta = \cos(\theta + 180^\circ)$$

$$\therefore \sin(\theta + 180^\circ) = -\sin \theta$$

٤

الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta - 360^\circ$

$$\textcircled{1} \sin(\theta - 360^\circ) = \sin \theta$$

$$\textcircled{2} \cos(\theta - 360^\circ) = \cos \theta$$

$$\textcircled{3} \tan(\theta - 360^\circ) = \tan \theta$$

$$\textcircled{4} \cot(\theta - 360^\circ) = \cot \theta$$

$$\textcircled{5} \sec(\theta - 360^\circ) = \sec \theta$$

$$\textcircled{6} \csc(\theta - 360^\circ) = \csc \theta$$

ملحوظة

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي

$$360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\therefore 360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\therefore 360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \sin 360^\circ$$

$$\sin 360^\circ =$$

مثال ١١

في أي شكل رباعي a, b, c, d يكون

$$\dots = \frac{b}{(d+c+a)} + \frac{(a+b+c)}{d}$$

مثال ١٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

$$1) \quad 300$$

الحل

$\therefore 300$ تقع في الربع الرابع

$$360 - 60 = 300$$

$$\therefore 300 \text{ جا} = 360 - 60 \text{ جا} = 60 \text{ جا}$$

$$\sqrt{360} =$$

$$2) \quad 330$$

الحل

$\therefore 330$ تقع في الربع الرابع

$$360 - 30 = 330$$

$$\therefore 330 \text{ طا} = 360 - 30 \text{ طا} = 30 \text{ طا}$$

$$\sqrt{360} =$$

$$3) \quad 315$$

الحل

$\therefore 315$ تقع في الربع الرابع

$$360 - 45 = 315$$

$$\therefore 315 \text{ قا} = 360 - 45 \text{ قا} = 45 \text{ قا}$$

$$\sqrt{360} =$$

$$4) \quad 210$$

الحل

$\therefore 210$ تقع في الربع الثالث

$$180 + 30 = 210$$

$$\therefore 210 \text{ طا} = 180 + 30 \text{ طا} = 30 \text{ طا}$$

$$\sqrt{360} =$$

$$5) \quad 150$$

الحل

$\therefore 150$ تقع في الربع الثاني

$$180 - 30 = 150$$

$$\therefore 150 \text{ قتا} = 180 - 30 \text{ قتا} = 30 \text{ قتا}$$

$$2 =$$

$$6) \quad 240$$

الحل

$\therefore 240$ تقع في الربع الثاني

$$180 + 60 = 240$$

$$\therefore 240 \text{ حتا} = 180 + 60 \text{ حتا} = 60 \text{ حتا}$$

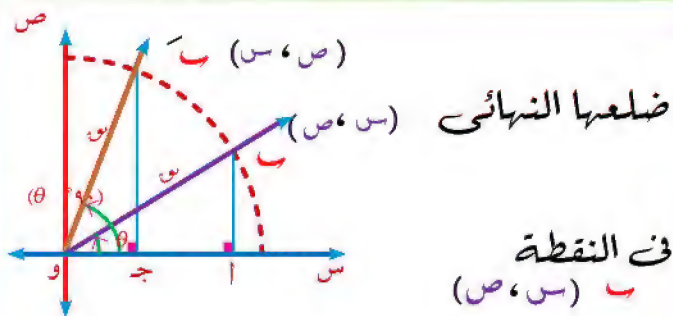
$$\sqrt{360} =$$

مثال ١٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

$$100 \text{ حتا} (-30) + 150 \text{ حتا} (-45) = 1$$



٤ الدوال التليبية للزاويتان θ ، $90^\circ - \theta$ اذا كانت الزاوية الموجهة التي قياسها θ فإن الزاوية التي قياسها $90^\circ - \theta$ ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\cos(90^\circ - \theta), \sin(90^\circ - \theta))$

ونلاحظ :

$$① \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta) , \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\therefore \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$$

$$② \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta) , \cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$③ \tan \theta = \cot(90^\circ - \theta) , \cot \theta = \tan(90^\circ - \theta)$$

$$\therefore \tan \theta = \cot(90^\circ - \theta)$$

لأى زاويتين متتامتين α ، β فإن

$$\sin \alpha = \cos \beta \quad \cos \alpha = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta \quad \cot \alpha = \tan \beta$$

$$\sec \alpha = \csc \beta \quad \csc \alpha = \sec \beta$$

الزاويتان : 20° ، 70°
هما زاويتان متتامتان

الحل

$$100^\circ , (30^\circ -) , (240^\circ -)$$

$$360^\circ + 240^\circ = 600^\circ$$

∴ الزاوية التي قياسها 240° تلك في زاوية قياسها 240° $(20^\circ -)$ قياسها الموجب هو 330° $(240^\circ -)$ قياسها الموجب هو 120°

اليمين

$$= 100^\circ \text{ حتا } (30^\circ -) + 150^\circ \text{ حتا } (240^\circ -)$$

$$= 240^\circ \text{ حتا } 330^\circ + 150^\circ \text{ حتا } 120^\circ$$

$$= (180^\circ + 60^\circ) \text{ حتا } (30^\circ - 360^\circ) + (180^\circ - 60^\circ) \text{ حتا } (240^\circ - 360^\circ)$$

$$= 60^\circ \text{ حتا } 30^\circ + 30^\circ \text{ حتا } (-60^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= 1 -$$

$$= \text{اليسر}$$

تدريب

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

$$\text{قيمة : } \cot \frac{\pi}{3}$$

مثال

نأمل ما باتى

- ① جتا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ② جا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ③ ظا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ④ قتا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ⑤ قا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$
 ⑥ ظنا $(\theta + 90) = \dots\dots\dots$

تدريب

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

① جتا $120 =$

② جا $150 =$

③ ظا $135 =$

④ قتا $120 =$

⑤ قا $150 =$

⑥ ظنا $135 =$

$\therefore \text{جتا } 20^\circ = \text{جتا } 70^\circ$

$\text{جا } 20^\circ = \text{جتا } 70^\circ$

مثال ١٤

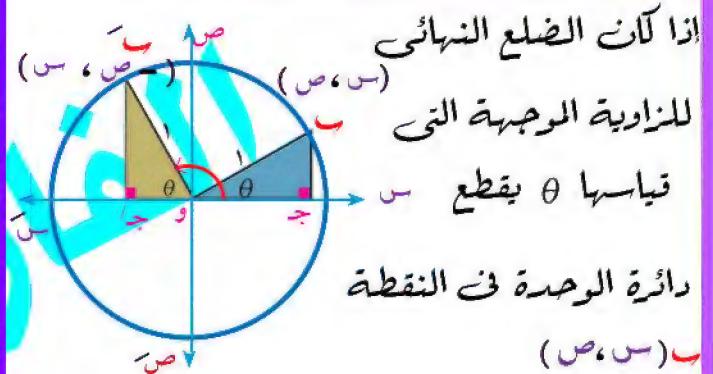
أمل

① جتا $50^\circ - \text{جتا } 40^\circ = \dots\dots\dots$

② قتا $80^\circ - \frac{\text{طا } 10^\circ}{\text{ظنا } 70^\circ} = \dots\dots\dots$

③ جتا $20^\circ \text{ جتا } 20^\circ - \text{جتا } 70^\circ \text{ جتا } 70^\circ =$

⑤ الدوال التلنية للزاويتان $\theta, \theta + 90$



إذا كانت الضلع النهائى للزاوية الموضحة التى قياسها θ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\cos \theta, \sin \theta)$ فإن الزاوية التى قياسها $\theta + 90$ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(-\sin \theta, \cos \theta)$

الدوال التلنية للزاويتان: $\theta, \theta + 90$

$$\begin{aligned} \text{جتا } (\theta + 90) &= -\text{جتا } \theta, \text{ قتا } (\theta + 90) = \text{جتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 90) &= -\text{جتا } \theta, \text{ جا } (\theta + 90) = \text{جتا } \theta \\ \text{طا } (\theta + 90) &= -\text{ظنا } \theta, \text{ ظنا } (\theta + 90) = \text{ظنا } \theta \end{aligned}$$

مثال ١٥

إذا كانت θ زاوية موضحة فى الرضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$

الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta + 270^\circ$

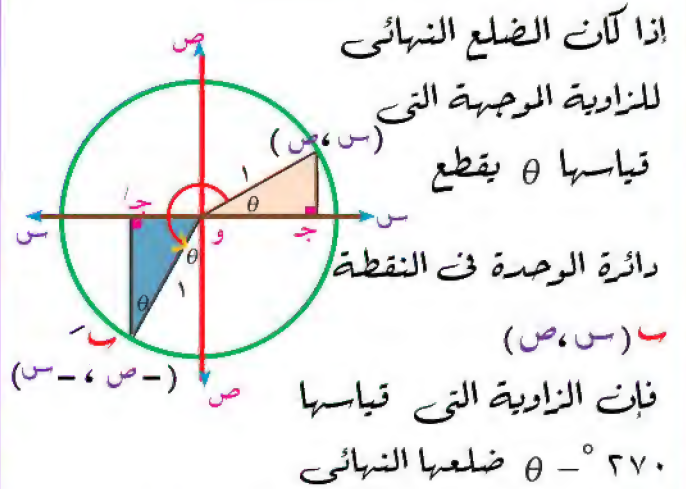
$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta + 270^\circ) &= -\text{جتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta + 270^\circ) &= \text{جا } \theta \\ \text{ظا } (\theta + 270^\circ) &= -\text{ظتا } \theta \\ \text{قتا } (\theta + 270^\circ) &= \text{قتا } \theta \\ \text{قا } (\theta + 270^\circ) &= \text{قتا } \theta \\ \text{طتا } (\theta + 270^\circ) &= \text{طتا } \theta \end{aligned}$$

الدوال التثلثية للزاويتين: $(\theta, \theta -)$

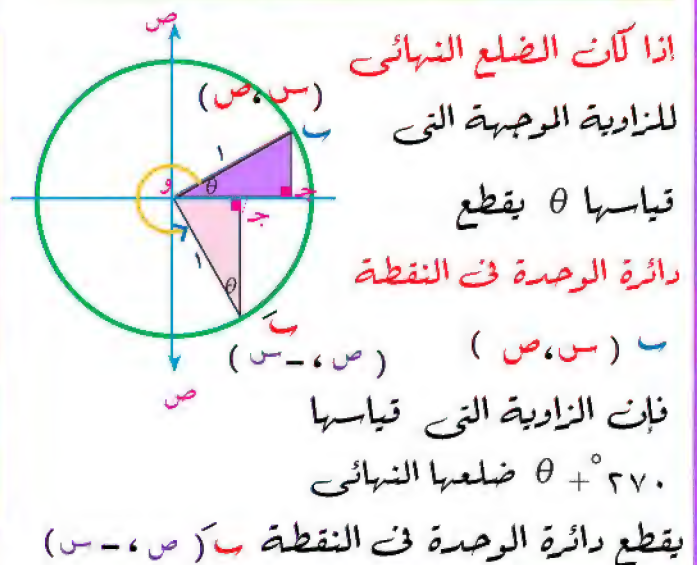
$$\begin{aligned} \text{جتا } (\theta -) &= \text{جتا } \theta \\ \text{جا } (\theta -) &= -\text{جا } \theta \\ \text{قا } (\theta -) &= \text{قا } \theta \\ \text{قتا } (\theta -) &= -\text{قتا } \theta \\ \text{ظا } (\theta -) &= \text{ظا } \theta \\ \text{ظتا } (\theta -) &= -\text{ظتا } \theta \end{aligned}$$

ملاحظات

①

الزوايا التي لها القياس: θ ، $(\theta - 90^\circ)$
تقع في الربع الأولالزوايا التي لها القياس: $(\theta + 90^\circ)$ ، $(\theta - 180^\circ)$
تقع في الربع الثانيالزوايا التي لها القياس: $(\theta + 180^\circ)$ ، $(\theta - 270^\circ)$
تقع في الربع الثالثالزوايا التي لها القياس: $(\theta + 270^\circ)$ ، $(\theta - 360^\circ)$ ، $(\theta -)$
تقع في الربع الرابع.الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta - 270^\circ$ الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta - 270^\circ$

$$\begin{aligned} \text{جا } (\theta - 270^\circ) &= \text{جتا } \theta \\ \text{جتا } (\theta - 270^\circ) &= \text{جا } \theta \\ \text{ظا } (\theta - 270^\circ) &= \text{ظتا } \theta \\ \text{قتا } (\theta - 270^\circ) &= \text{قتا } \theta \\ \text{قا } (\theta - 270^\circ) &= \text{قتا } \theta \\ \text{طتا } (\theta - 270^\circ) &= \text{طتا } \theta \end{aligned}$$

الدوال التثلثية للزاويتان: θ ، $\theta + 270^\circ$ 

الحل

$$\begin{aligned} \text{جنا } 120^\circ &= \text{جنا } (180^\circ - 60^\circ) = - \text{جنا } 60^\circ = -\frac{\pi}{3} \\ \text{ظا } 315^\circ &= \text{ظا } (360^\circ - 45^\circ) = - \text{ظا } 45^\circ = -1 \\ \text{جا } 240^\circ &= \text{جا } (180^\circ + 60^\circ) = - \text{جا } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{ظا } 300^\circ &= \text{ظا } (360^\circ - 60^\circ) = - \text{ظا } 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{جنا } 120^\circ \text{ ظا } 315^\circ + \text{جا } 240^\circ \text{ ظا } 300^\circ \\ 2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x \right) + \left(1 - x \right) \left(1 - x \right) = \end{aligned}$$

حل المعادلات المثلثية البسيطة

١ إذا كان : $\alpha = \text{جنا } \beta$ فإن :

$$\sim \alpha \pm \beta = 360^\circ + 90^\circ$$

$$\sim \alpha \pm \beta = \pi + \frac{\pi}{2}$$

حيث \sim عدد صحيح

٢

إذا كان : $\alpha = \text{ظا } \beta$ فإن :

$$\sim \alpha \pm \beta = 360^\circ + 90^\circ$$

$$\sim \alpha \pm \beta = \pi + \frac{\pi}{2}$$

حيث \sim عدد صحيح

٣

إذا كان : $\alpha = \text{ظا } \beta$ فإن :

$$\sim \alpha + \beta = 180^\circ + 90^\circ$$

$$\sim \alpha + \beta = \pi + \frac{\pi}{2}$$

حيث \sim عدد صحيح

٢

الزوايا التي قياسها : θ ، $(180^\circ - \theta)$ ،

$$(\theta + 180^\circ) ، (\theta - 360^\circ) ، (\theta -)$$

تكون نفس الدالة التثلثية لها جميعاً
متساوية من حيث القيمة العددية فقط
وتختلف فقط في الإشارة حسب الربع الذي
تقع فيه كل منها

٣

الزوايا التي قياسها :

$$(\theta - 90^\circ) ، (\theta + 90^\circ)$$

$$(\theta - 270^\circ) ، (\theta + 270^\circ)$$

تتغير فيها الدالة التثلثية للزاوية التي قياسها
" θ " بوضع حرف (ت) في الدالة التي ليس
بها حرف (ت) - أو بحذف حرف (ت)

من الدالة التي بها حرف (ت)

(جنا) تصب (جا) ، (قتا) تصب (قا) وتختلف :

في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية
قبل تغيير الدالة التثلثية

مثال ١٦

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

قيمة

$$\text{جنا } 120^\circ \text{ ظا } 315^\circ + \text{جا } 240^\circ \text{ ظا } 300^\circ$$



مثال ١٧

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية
ثم أوجد قيم θ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$\sin \theta = \cos 2\theta$$

الحل

$$\therefore \sin \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\begin{array}{l|l} \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \text{بالقسمة على ١ للطرفين} & \text{بالقسمة على ٢ للطرفين} \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) & \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \end{array}$$

الحل العام هو :

$$\sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - 2\theta \quad \text{أو} \quad \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

بإيجاد قيم θ

$$\begin{array}{l} \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \end{array}$$

بوضع $\theta = 0$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\begin{array}{l} \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \\ \therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) \end{array}$$

بوضع $\theta = 0$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

بوضع $\theta = 0$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\sin \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

الحل

$$\sin \theta = \cos 2\theta \Rightarrow \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

بالقسمة على الطرفين

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$

$$\therefore \sin \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$$



$$\therefore 36 \text{ ظا } \theta = 1$$

$$\text{ظا } \theta = \frac{1}{36} < \text{صفر}$$

θ تقع في الربع الأول أو الثالث

$$^{\circ}210 = ^{\circ}30 + ^{\circ}180 = \theta \quad | \quad ^{\circ}30 = \theta$$

$$\{^{\circ}210, ^{\circ}30\} = \text{ج.م}$$

$$\textcircled{2} \text{ جـ } 2 \text{ جـ } \theta - 1 = \text{صفر}$$

الحل

$$\text{جـ } \theta = 1 < \text{صفر}$$

θ تقع في الربع الأول أو الثاني

$$^{\circ}150 = ^{\circ}30 - ^{\circ}180 = \theta \quad | \quad ^{\circ}30 = \theta$$

$$\{^{\circ}150, ^{\circ}30\} = \text{ج.م}$$

$$\textcircled{3} \text{ جـ } \theta \text{ جـ } \theta = \text{صفر}$$

الحل

$$\text{جـ } \theta = \text{صفر}$$

$$^{\circ}270, ^{\circ}90 = \theta \quad | \quad ^{\circ}180, ^{\circ}0 = \theta$$

$$\{^{\circ}270, ^{\circ}180, ^{\circ}90, ^{\circ}0\} = \text{ج.م}$$

$$\textcircled{2} \text{ جـ } 2 \text{ جـ } \theta + 1 = \text{صفر}$$

θ تقع في الربع الثاني أو الثالث

$$^{\circ}60 + ^{\circ}180 = \theta \quad | \quad ^{\circ}60 - ^{\circ}180 = \theta$$

$$^{\circ}240 = \quad | \quad ^{\circ}120 =$$

$$\{^{\circ}240, ^{\circ}120\} = \text{ج.م}$$

$$\textcircled{3} \text{ جـ } 3 \text{ جـ } \theta = (30 + \theta)$$

الحل

$$^{\circ}360 + ^{\circ}90 = (30 + \theta) \pm \theta$$

$$^{\circ}360 + ^{\circ}90 = (30 + \theta) - \theta \quad | \quad ^{\circ}360 + ^{\circ}90 = (30 + \theta) + \theta$$

$$^{\circ}360 + ^{\circ}90 = 30 - \theta$$

$$^{\circ}360 + ^{\circ}120 = \theta$$

بالقسمة على 6 للطرفين

$$^{\circ}90 + ^{\circ}30 = \theta \therefore$$

$$\text{بوضع } 0 = \sim$$

$$^{\circ}30 = \theta \therefore$$

$$\text{بوضع } 1 = \sim$$

$$^{\circ}120 = ^{\circ}90 + ^{\circ}30 = \theta \therefore$$

مرفوض

$$^{\circ}360 + ^{\circ}90 = (30 + \theta) - \theta$$

$$^{\circ}360 + ^{\circ}60 = \theta$$

بالقسمة على 6 للطرفين

$$^{\circ}60 + ^{\circ}10 = \theta \therefore$$

$$\text{بوضع } 0 = \sim$$

$$^{\circ}10 = \theta \therefore$$

$$\text{بوضع } 1 = \sim$$

$$^{\circ}70 = ^{\circ}60 + ^{\circ}10 = \theta$$

$$\text{بوضع } 2 = \sim$$

$$\therefore 30 = \theta \text{ مرفوض}$$

$$\therefore \{^{\circ}70, ^{\circ}30, ^{\circ}10\} \ni \theta$$

مثال ١٧

أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية حيث

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\textcircled{1} 36 \text{ ظا } \theta = 1$$



تمارين (١٢)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : هـ مـا $(\theta - 90^\circ) = \varepsilon$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن : هـ $\theta = \dots\dots\dots$ (1) $\frac{0}{\varepsilon}$ (ب) $\frac{3}{0}$ (ج) $\frac{\varepsilon}{0}$ (د) $\frac{3}{0}$ ② إذا كانت : طـا $(\theta + 90^\circ) = 1 + \dots$ حيث : $0^\circ < \theta < 90^\circ$ فإن : هـ $\theta = \dots\dots\dots$ (1) $\frac{1}{4}$ (ب) 1 (ج) صفر (د) $1 -$ ③ إذا كان : هـ مـا $(\theta + 90^\circ) + \dots = (\theta - 90^\circ) + \dots$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{\varepsilon}]$ ، فإن : هـ $\theta = \dots\dots\dots$ (أ) $\frac{1}{4}$ (ب) 1 (ج) صفر (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ إذا كان : هـ مـا $(\theta - 270^\circ) = \frac{1}{4}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبةفإن : $\theta = \dots\dots\dots$ (1) 30° (ب) 150° (ج) 210° (د) 330° ⑤ إذا كان : طـا $\theta = \frac{0}{12}$ ، هـ مـا $\theta > 0$ فإن : هـ $\theta = \dots\dots\dots$ (1) $\frac{0}{13}$ (ب) $\frac{0}{13}$ (ج) $\frac{13}{0}$ (د) $\frac{13}{0}$ ⑥ إذا كان : هـ مـا $\theta = \frac{1}{4}$ ، طـا $\theta < 0$ فإن : هـ $\theta = \dots\dots\dots$ (1) 30° (ب) 150° (ج) 210° (د) 330° ⑦ إذا كان : هـ مـا $\theta = \frac{3}{0}$ حيث $18^\circ < \theta < 270^\circ$ فأوجد قيمة كل من :① قـا $(\theta + 180^\circ)$ ② قـا $(\theta -)$ ③ طـا $(\theta - 270^\circ)$ ④ طـا $(90^\circ - \theta)$ ⑤ قـا $(\theta + 90^\circ)$ ⑥ طـا $(\theta - 270^\circ)$ ⑦ طـا $(\theta + 270^\circ)$

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

② هـ مـا $\theta = \theta$ ① هـ مـا $\theta = \theta$

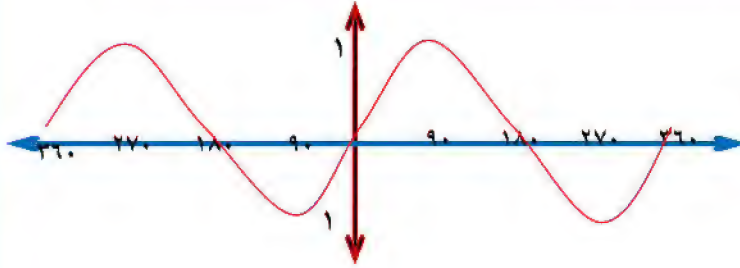
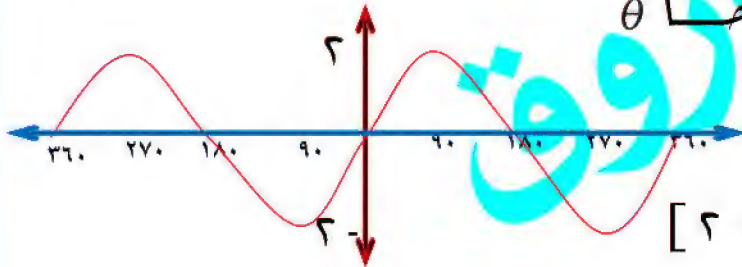
التمثيل البياني للدوال المثلثية

دالة الجيب

عند تمثيل الدالة $y = \sin(\theta)$:

θ	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
جا θ	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0

نحصل على النصف القابل

١ مدى الدالة هو الفترة $[-1, 1]$ ٢ مجال الدالة هو \mathbb{R} ٣ الدالة دورية دورتها 2π ٤ القيمة العظمى للدالة $= 1$ وتبلغها عند $\theta = 90^\circ + 360^\circ n$ ، $n \in \mathbb{Z}$ ٥ القيمة الصغرى للدالة $= -1$ وتبلغها عند $\theta = 270^\circ + 360^\circ n$ ، $n \in \mathbb{Z}$ عند تمثيل الدالة $y = 2 \sin(\theta)$:

نلاحظ أن :

١ مدى الدالة هو الفترة $[-2, 2]$ ٢ القيمة العظمى للدالة $= 2$ وتبلغها عند $\theta = 90^\circ + 360^\circ n$ ، $n \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{Z}$ ٥ القيمة الصغرى للدالة $= -2$ وتبلغها عند $\theta = 270^\circ + 360^\circ n$ ، $n \in \mathbb{Z}$ $n \in \mathbb{Z}$

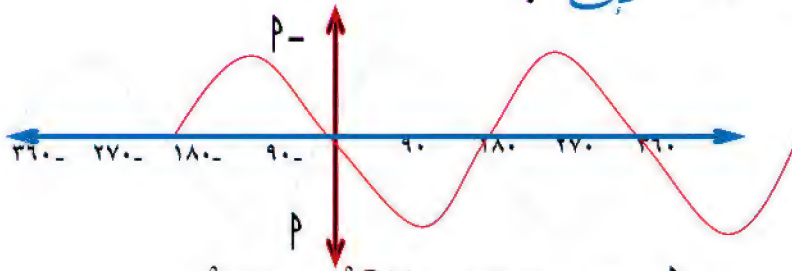
ملحوظة

■ إذا كانت $y = p \sin(\theta)$ ، $p > 0$ فإن

■ إذا كانت

: $y = p \sin(\theta)$ فإن١ مدى الدالة هو الفترة $[-p, p]$ ٢ القيمة العظمى $= p$ ٣ القيمة الصغرى $= -p$ ٤ الدالة دورية ودورها 2π الدالة دورية ودورها $\frac{2\pi}{|p|}$ 

■ إذا كانت θ د $P = \sin(\theta)$ ، فإن $0 < P$:



① هو نفس معنى الدالة

ص $P = \sin \theta$

بالانعكاس في محور السينات

② النحني يبلغ القيمة العظمى P عندما $\theta = 90^\circ + 360^\circ$

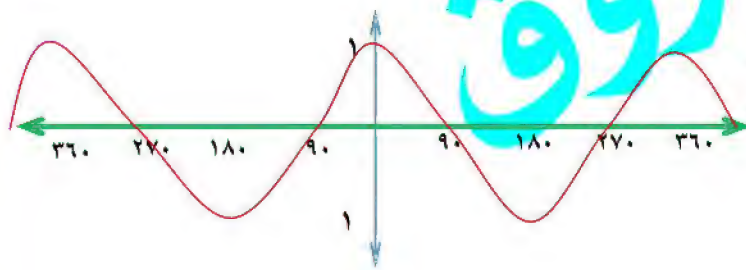
③ القيمة الصغرى $P = -1$ عندما $\theta = 270^\circ + 360^\circ$

④ الدالة دورية ودورتها 2π

دالة جيب التمام

عند تمثيل الدالة $\cos(\theta)$:

θ	360	330	300	270	240	210	180	150	120	90	60	30	0
حنا θ	1	0,87	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,87	-0,5	0	0,5	0,87	1



نحصل على النحني المقابل

مدى الدالة هو الفترة $[-1, 1]$

مجال الدالة هو \mathbb{R}

الدالة دورية ودورتها 2π

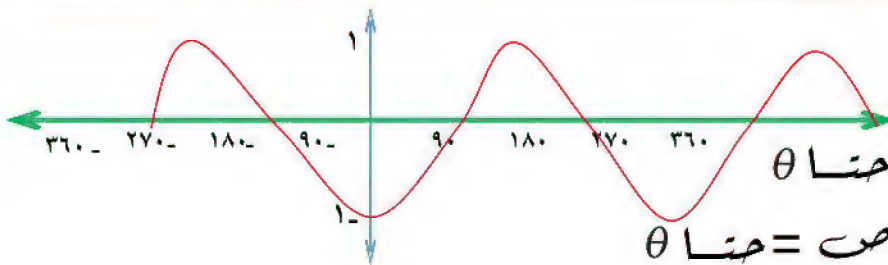
القيمة العظمى للدالة $= 1$

القيمة الصغرى للدالة $= -1$

عند $\theta = 0^\circ + 360^\circ$ ، $\cos \theta = 1$

عند $\theta = 180^\circ + 360^\circ$ ، $\cos \theta = -1$

ملحوظة



معنى الدالة $\sin(\theta)$:

هو نفس معنى الدالة \cos :

بالانعكاس في محور السينات

■ من معنى الدالة د :

$$د(\theta) = -\sin \theta$$

① القيمة العظمى للدالة = ١

وتبلغها الدالة عند :

$$\theta = 180^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$$

② القيمة الصغرى للدالة = -١

وتبلغها الدالة عند :

$$\theta = 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$$

ملاحظات على دالتي الجيب وجيب التمام

د(θ) = أجاب θ ، د(θ) = اجتأب θ دالة دورية

■ الدى = $[1, -1]$

■ الدورة = $\frac{\pi}{2}$

مثال ١

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والدى والدورة لكل من الدوال الآتية

① ص = ما θ

الحل

ص = ما θ ، ١ = ١ ، ١ = ١

القيمة العظمى = ١

= -١ = ١ -

الدى = $[1, -1]$ ، $[1, -1]$
الدورة = $\frac{\pi}{2}$ ، π^2

② ص = ٣ ما θ

الحل

١ = ١ ، ٣ = ١

القيمة العظمى = ١ = ٣

القيمة الصغرى = -١ = -٣

الدى = $[1, -1]$ ، $[3, -3]$

الدورة = $\frac{\pi}{2}$ ، π^2

③ ص = ٥ ما ٣ θ

الحل

١ = ١ ، ٥ = ١

القيمة العظمى = ١ = ٥

القيمة الصغرى = -١ = -٥

القيمة الصغرى = $[1, -1]$ ، $[5, -5]$

الدورة = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi^2}{3}$

١ أكمل العبارات الآتية:

- ① مدى الدالة $y = \sin(\theta)$ هو θ
 ② مدى الدالة $y = \cos(\theta)$ هو θ
 ③ مدى الدالة $y = \tan(\theta)$ هو θ
 ④ القيمة الصغرى للدالة $y = \sin(\theta)$ هي θ
 ⑤ دورة الدالة $y = \sin(\theta)$ هي θ
 ⑥ القيمة العظمى للدالة $y = \cos(\theta)$ هي θ

٢ أوجد القيمة العظمى والصغرى للدالة y وأكتب مدى في كل مما يأتي:

- ① $y = \sin(8\theta)$
 ② $y = -\sin(\theta)$
 ③ $y = \cos(3\theta)$
 ④ $y = \cos(6\theta)$
 ⑤ $y = \sin(4\theta)$
 ⑥ $y = -\cos(2\theta)$

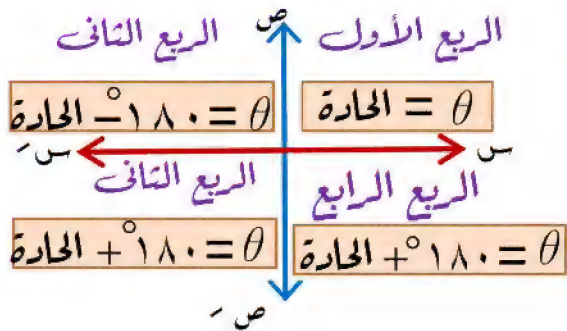
٣ أوجد مدى والدورة للدالة y في كل مما يأتي:

- ① $y = \sin(2\theta)$
 ② $y = \sin(9\theta)$
 ③ $y = \cos(5\theta)$
 ④ $y = \cos(6\theta)$
 ⑤ $y = \sin(2\theta)$
 ⑥ $y = -\cos(2\pi\theta)$



إيجاد قياس زاوية إذا علم إحدى نسبها المثلثية

فإذا كانت الزاوية تقع في

∴ هنا θ موجبة

∴ تقع في الربع الأول أو الرابع

في الأول	في الرابع
$\theta = \text{الحادة}$	$\theta = 360 - \text{الحادة}$
$\therefore \theta = 60^\circ$	$\theta = 360 - 60 = 300^\circ$

$$\textcircled{2} \theta = \text{جا}^{-1}(-0,6874) = (-, 6874)$$

الحل

الزاوية الحادة التي جيبها $0,6874$ هي $43^\circ 25' 29''$

$$\theta = \text{جا}^{-1}(-0,6874) = (-, 6874) > \text{صفر}$$

 θ تقع

في الربع الثالث

$$\theta = 180 + 43^\circ 25' 29'' = 223^\circ 25' 29''$$

إذا كانت: $\theta = \text{جا}^{-1} p$ فيمكن كتابتها

بصورة أخرى مكافئة هي

$$\theta = \text{جا}^{-1} p$$

فمثلا :

إذا كان: $\theta = \frac{1}{4}$

فيمكن كتابتها على الصورة

$$\theta = \text{جا}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

وبقصد بذلك إيجاد الزاوية التي جيبها $\frac{1}{4}$

مثال ١

أوجد " θ " حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ والتي تحقق أن :

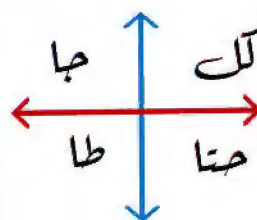
$$\textcircled{1} \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

الحل

نوجد زاوية حادة جيب تمامها $\frac{1}{4}$ ∴ الزاوية الحادة هي 60°

من إشارة النسبة التثلثية نحدد ربعين

تقع فيهم الزاوية



أو الرابع

$$316^\circ - 34^\circ = 31^\circ = 43^\circ - 25^\circ = 29^\circ - 36^\circ = \theta$$

ملحوظة

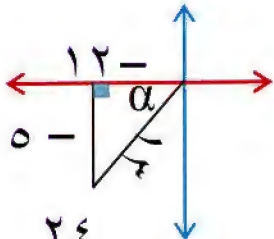
إذا علم إحدى النسب للزاوية التلتية
نرسم الزاوية في الوضع القياسي
ثم نرسم التلت القائم الخاص بها في
هذا الربع موزعا عليه الإشارات
ثم نوجد الضلع المجهول من نظرية
فيثاغورث

مثال ١

إذا كانت : 12° ظل α : 5°
حيث α أكبر زاوية مربعة ،
 25° جتا β : 24° حيث
 $\beta \in [90^\circ, 180^\circ]$ فأوجد قيمة القدر
قتا $(\alpha + 180^\circ) +$ جتا $(\beta - 180^\circ)$

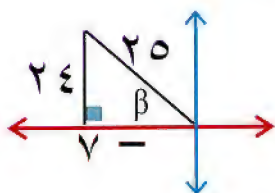
الحل

$$12^\circ \text{ ظل } \alpha : 5^\circ = \text{ظل } \alpha = \frac{5}{12}$$

حيث α أكبر زاوية مربعة $\therefore \alpha$ تقع في الربع الثالث

$$\therefore \text{ظل } \alpha = \frac{5}{12} = \frac{\text{القابل}}{\text{الجوارر}}$$

$$25^\circ \text{ جتا } \beta : 24^\circ = \text{جتا } \beta = \frac{24}{25}$$

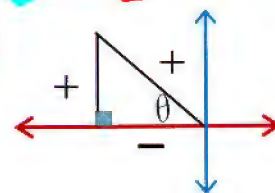
 $\therefore \beta \in [90^\circ, 180^\circ]$ حيث β تقع في الربع الثاني

$$\text{جتا } \beta = \frac{24}{25} = \frac{\text{القابل}}{\text{الوتر}}$$

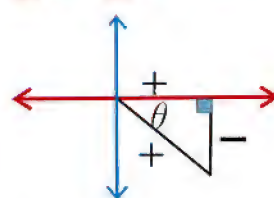
$$\text{قتا } (\alpha + 180^\circ) = -\text{قتا } \alpha$$

$$= -\left(\frac{12}{5}\right) = -\frac{12}{5}$$

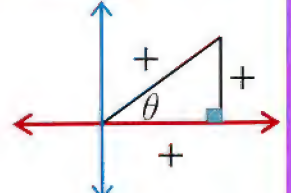
٢ إذا كانت θ تقع في الربع الثاني



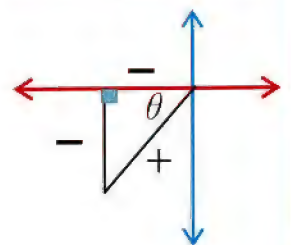
٤ إذا كانت θ تقع في الربع الرابع



١ إذا كانت θ تقع في الربع الأول



٣ إذا كانت θ تقع في الربع الثالث



$$\text{جنا} (\beta - 180^\circ) = -\text{جنا} \beta$$

$$\frac{7}{25} = \left(\frac{7}{25} \right) - =$$

$$\text{قنا} (\alpha + 180^\circ) + \text{جنا} (\beta - 180^\circ)$$

$$\frac{72}{25} = \frac{7}{25} + \frac{13}{5} =$$

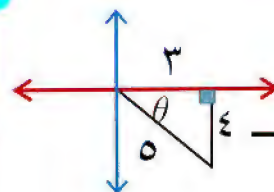
مثال ٢

إذا كانت : $\text{جنا} \theta = \frac{3}{5}$ حيث

$360^\circ > \theta > 270^\circ$ فأوجد قيمة المقدار

$$\text{جا} (\theta - 180^\circ) + \text{طا} (\theta - 90^\circ) - \text{طا} (\theta - 270^\circ)$$

الحل



θ تقع في الربع الرابع

المقدار =

$$\text{جا} (\theta - 180^\circ) + \text{طا} (\theta - 90^\circ) - \text{طا} (\theta - 270^\circ)$$

$$= \text{جا} \theta - \text{طا} \theta - \text{طا} \theta$$

$$= \text{جا} \theta - \frac{4}{5}$$



تمارين

١ أوجد θ "حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ و التي تحقق أن :

$$\textcircled{1} \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \textcircled{2} \theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\textcircled{3} \theta = \text{جتا}^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \textcircled{4} \theta = \text{جتا}^{-1}(1)$$

$$\textcircled{5} \theta = \text{جتا}^{-1}(2) \quad \textcircled{6} \theta = \text{جتا}^{-1}(-\sqrt{3})$$

٢ أوجد مجموعة الحل لكل من العادلات الآتية حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$

$$\textcircled{1} \text{جتا} \theta = 0,86603 \quad \textcircled{2} \text{جتا} \theta = -0,4752$$

$$\textcircled{3} \text{طا} \theta = 1,5417 \quad \textcircled{4} \text{جتا} \theta = -1,2576$$

$$\textcircled{5} \text{جتا} \theta = -1,8715 \quad \textcircled{6} \text{طا} \theta = 2,0515$$

$$\textcircled{7} \text{طا} \theta = -1,0899 \quad \textcircled{8} \text{جتا} \theta = -0,7349$$

٣ إذا كانت 12° ظا $\theta = 5^\circ$ حيث θ زاوية حادة فأوجد قيمة كل من :

$$\textcircled{1} \text{جتا}^2 \theta - \text{جتا}^2 \theta \quad \textcircled{2} \text{جتا} 120^\circ \text{جتا} (180^\circ - \theta) + \text{جتا} 510^\circ \text{جتا} \theta$$

٤ إذا كانت : 3° ظا $\theta = 4^\circ$ حيث $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$

فأوجد قيمة القرار : $5^\circ \text{جتا} \theta + \text{طا} (180^\circ - \theta) + \text{جتا} 120^\circ - \text{طا} 315^\circ$

٥ إذا كانت $\text{جتا} \theta = \frac{12}{13}$ حيث θ أكبر زاوية مربعة

فأوجد قيمة القرار : $\text{جتا} (180^\circ - \theta) \text{طا} \theta - \text{جتا} (180^\circ + \theta)$

٦ إذا كانت 4° ظا $\theta = 3^\circ$ حيث $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$, 13^\circ \text{جتا} \theta - 12^\circ \text{جتا} \theta \text{ حيث } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\text{طا} (90^\circ - \theta) \text{جتا} (-\theta) + \text{جتا} 30^\circ$$

فأوجد قيمة القرار : $2^\circ \text{جتا} 60^\circ \text{طا} 60^\circ - 45^\circ \text{جتا} 2^\circ$

كراست

الفاروق

للملاحظات

أ / عشري فاروق

ملاحظات

التاريخ ٢٠ / /

اليوم

الموضوع

ملاحظات

التاريخ / / ٢٠

اليوم

الموضوع

ملاحظات

التاريخ ٢٠ / /

اليوم

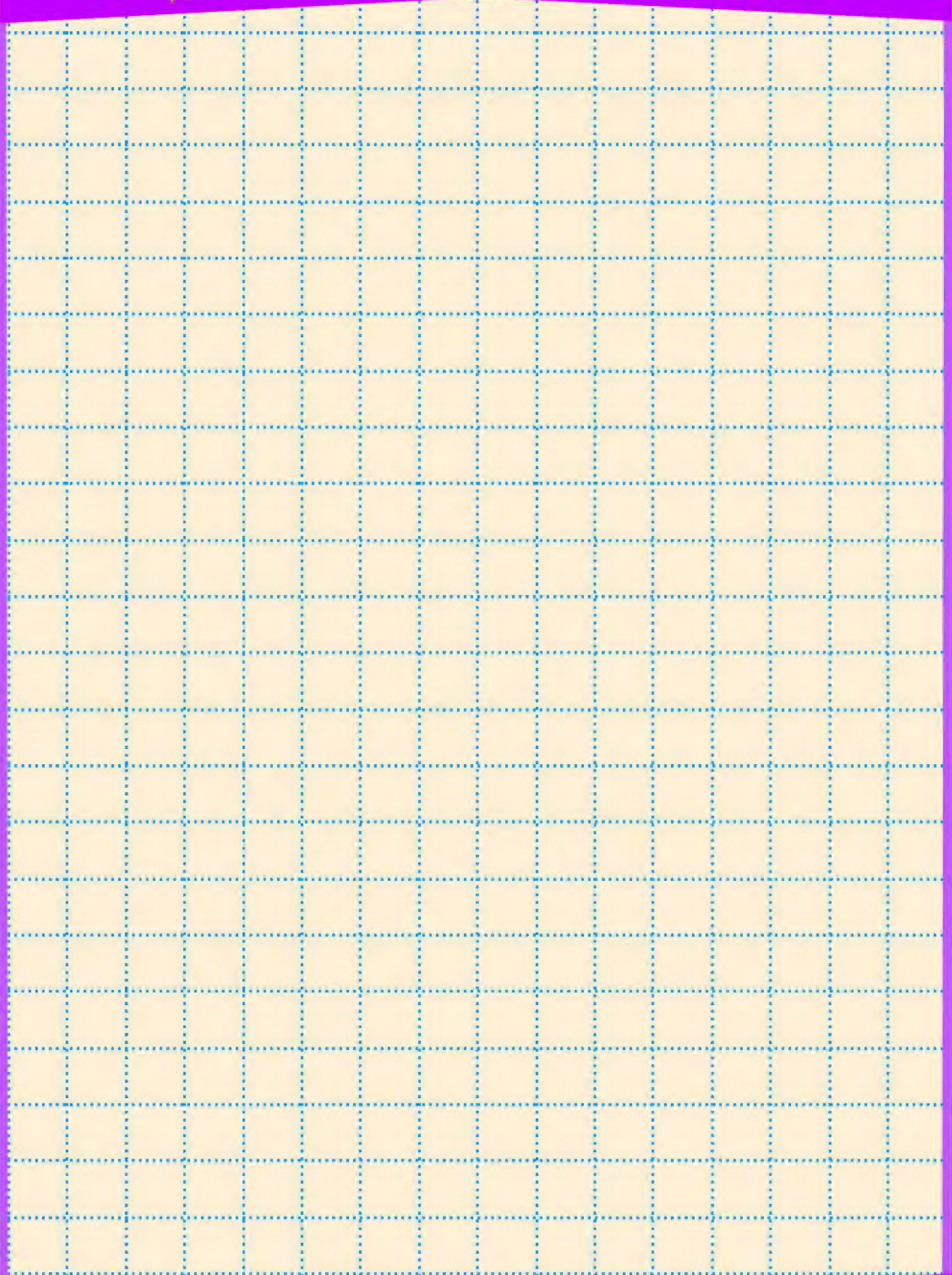
الموضوع

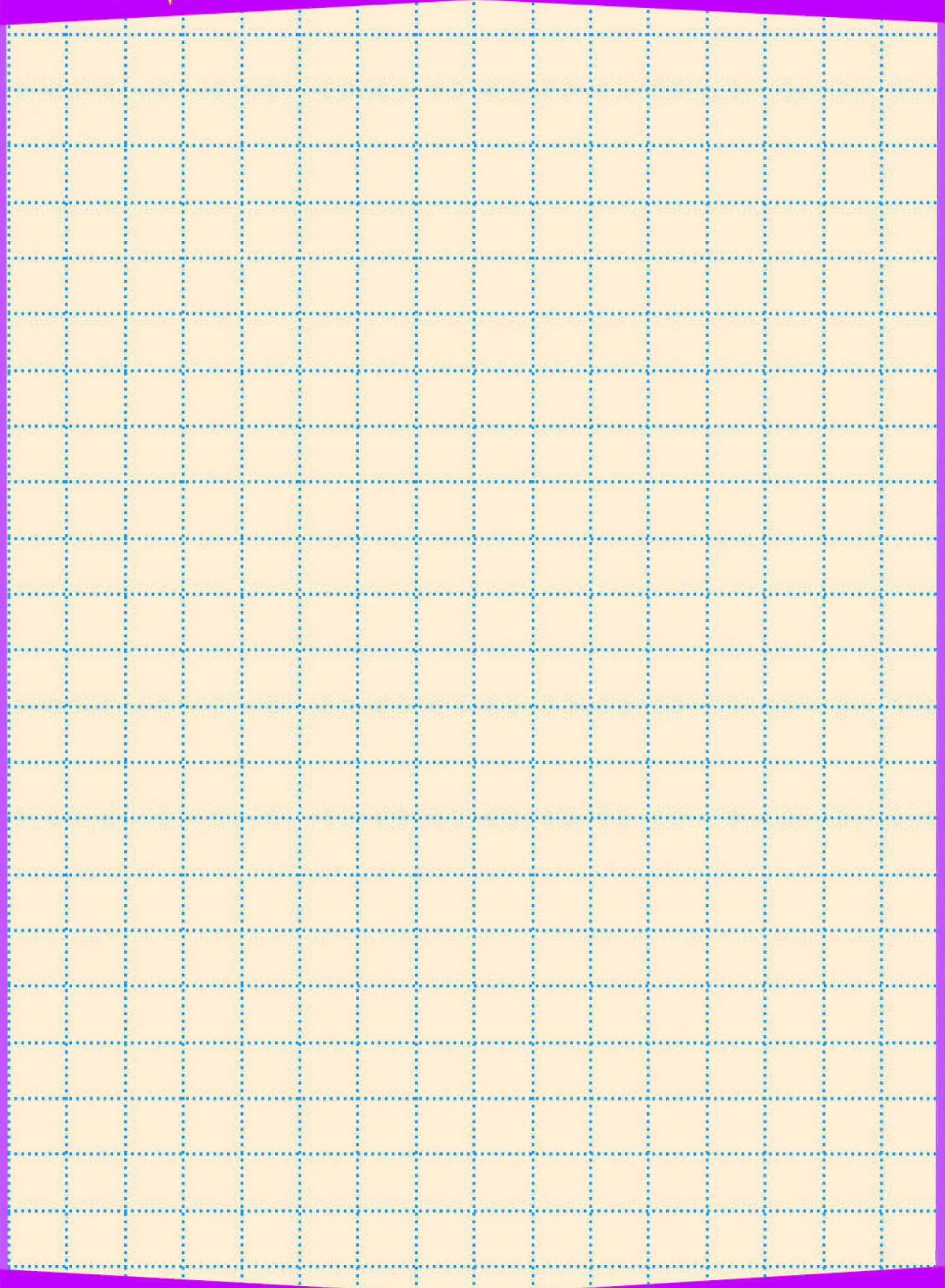
ملاحظات

التاريخ ٢٠ / /

اليوم

الموضوع





[illegible]

[illegible]

